Ejercicios para Final de la Materia: Lógica Modal Computacional

Docente: Carlos Areces (`carlos@science.uva.nl`)

Versión Definitiva

4 de Octubre

Instrucciones: Cada ejercicio tendrá asignado un puntaje de acuerdo a su grado de dificultad. Es necesario obtener 40 puntos en la parte teórica y 40 puntos en la parte práctica para aprobar el exámen. Pueden realizarse tantos ejercicios como se quiera. Completar parcialmente un ejercicio también dará puntos, si la parte resuelta es relevante.

La entrega es estrictamente individual aunque los ejercicios pueden ser discutidos en grupo. Pero por favor, luego de discutir el ejercicio, cada uno deberá dar una contestación personal al problema.

Aconsejo poner explicitamente todas las suposiciones hechas, referencias a resultados usados y no detallados, etc. en la solución, ya que no voy a tener la oportunidad de discutir los ejercicios con cada uno de los alumnos y deberé corregir únicamente en base a las respuestas enviadas.

Durante Octubre, pueden enviarme por e/mail preguntas relacionadas a los ejercicios. Intentaré responderlas lo antes posible (pero después de un mes y medio ausente me esperan unas semanas de bastante trabajo allí, para ponerme al día :)).

Fecha de Entrega: Los ejercicios deben ser entregados durante la primera semana de Noviembre (si alguien necesita más tiempo, que me escriba). El mejor método de entrega sería via e-mail, mediante un archivo Postscript conteniendo las respuestas. Las entregas manuscritas pueden enviarse por correo o por fax al número +31 20 525 2800. En ambos casos (y especialmente en el segundo), intentar que el original sea bien legible, e informarme por e-mal que las respuestas fueron enviadas. Los que envíen el final por correo, tengan en cuenta que el correo normal puede tardar hasta 2 semanas, lo que puede demorar la corrección.

1 Teóricos

- (2.3.5 de LM. 10 Puntos) Recordar que en clase vimos un ejemplo de una filtración de un modelo transitivo que no era transitiva. Demostrar Lemma 2.42. Es decir, demostrar que la relacion R^t definida alli es una filtración, y que cualquier filtración de un modelo transitivo usando R^t resulta en una relación transitiva.

- (Nuevo + 2.4.3 de LM. 5 Puntos) Dar la noción adecuada de bisimulación para el lenguaje temporal básico y demostrar que preserva la satisfiabilidad de fórmulas en este lenguaje. Luego mostrar que existen formulas del lenguaje de primer orden $\alpha(x)$ usando a lo sumo dos variables que no son equivalentes a la traducción standard de ninguna formula temporal básica.

- (6.5.1 de LM. 20 Puntos)

  (i) Demostrar que el problema de satisfiabilidad the la siguiente lógica de 'tiling' $\mathbf{Tile}_1$ es indecidible. $\mathbf{Tile}_1$ es una lógica modal con tres diamantes $\langle u\rangle$, $\langle r\rangle$ y $\Diamond$, definidas mediante los siguientes axiomas (Sahlqvist)

$\langle u\rangle p \to [u]p$ y $\langle r\rangle p \to [r]p$	$\langle u\rangle$ y $\langle r\rangle$ son funciones parciales. $(*)$
$\langle r\rangle\langle u\rangle p \to [u]\langle r\rangle p$	$\forall xyz.(R^r xy \wedge R^u yz) \to \forall v.(R^u xv \to R^v z))$
$\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$	$\Diamond$ es transitiva
$\langle u\rangle p \to \Diamond p$ y $\langle r\rangle p \to \Diamond p$	$\langle u\rangle \subseteq \Diamond$ y $\langle r\rangle \subseteq \Diamond$

  (ii) Usar ahora esta lógica mas la traducción standard para concluir que el fragmento de la lógica de primer orden con solo tres variables (sin símbolos de función, pero quizas con igualdad) es indecidible.

(iii) Sea $\mathbf{Tile}_2$ la lógica obtenida de $\mathbf{Tile}_1$ omitiendo el axioma $(*)$. Demostrar que $\mathbf{Tile}_2$ es también indecidible. (Ayuda: reducir el problema de satisfiabilidad de $\mathbf{Tile}_1$ al de $\mathbf{Tile}_2$).

(iv) Concluir que la lógica de primer orden con solo tres variables y sin igualdad es indecidible.

(v) Usar una lógica de tiling similar para mostrar que la lógica de primer orden con solo una variable, dos símbolos de función unarios, y sólo símbolos de predicado unario es indecidible. (Ayuda: ajustar la traducción standard para que use directamente los símbolos de función directamente).

- (6.6.1 de LM. 5 Puntos) Demostrar Lemma 6.36. Es decir, demostrar que si F es una clase de frames definida mediante una sentencia de primer orden, el problema de decidir si un frame $\mathcal{F}$ pertenece a F es decidible en tiempo polinomial en el tamaño de $\mathcal{F}$.

- (6.6.4 de LM. 8 Puntos) Definir una función de selección para demostrar que $\mathsf{S5}$ tiene la propiedad del modelo polinomial, y su problema de satisfacción es por lo tanto NP-complete.

- (Nuevo, 10 Puntos) Demostrar que la traducción layered preserva satisfiabilidad para la lógica modal básica. Es la proposición anterior cierta cuando nos restringimos por ejemplo a modelos donde la relación es transitiva? Y cuando está presente el operador de pasado P? Decir en cada caso por que sí (dar demostración) o por que no (dar contraejemplo)?

- (Nuevo, 8 Puntos) Demostrar que todas las condiciones sobre frames definidas por una formula del lenguaje hibrido básico (solo @ y nominales) que no use variables proposicionales son condiciones de primer orden.

- (Nuevo, 12 Puntos) Agregar la modalidad universal A al lenguaje hibrido básico. Usar un argumento de filtracion para demostrar que el problema de satisfiabilidad del lenguaje resultante es decidible. Cual es su complejidad?

2 Prácticos

- (1.3.2 de LM, 7 Puntos) Sea $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, S_1, S_2 \rangle$ and $\mathcal{B} = \langle \mathbb{B}, R_1, R_2 \rangle$ los siguientes frames para un tipo de similaridad modal con dos diamantes $\diamond_1$ y $\diamond_2$. Donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales, $\mathbb{B}$ es el conjunto de strings de 0s y 1s, y las relaciones se definen como

$$\begin{array}{rll} mS_1n & \text{iff} & n = m + 1, \\ mS_2n & \text{iff} & m > n, \\ sR_1t & \text{iff} & t = s0 \text{ or } t = s1, \\ sR_2t & \text{iff} & t \text{ is a proper initial segment of } s \end{array}$$

Cuál de las siguientes fórmulas es válida en $\mathbb{N}$ y $\mathbb{B}$, respectivamente, y argumentar por qué?

(a) $(\diamond_1 p \wedge \diamond_1 q) \to \diamond_1(p \wedge q)$,
(b) $(\diamond_2 p \wedge \diamond_2 q) \to \diamond_2(p \wedge q)$,
(c) $(\diamond_1 p \wedge \diamond_1 q \wedge \diamond_1 r) \to (\diamond_1(p \wedge q) \vee \diamond_1(p \wedge r) \vee \diamond_1(q \wedge r))$,
(d) $p \to \diamond_1 \Box_2 p$,
(e) $p \to \diamond_2 \Box_1 p$,
(f) $p \to \Box_1 \diamond_2 p$,
(g) $p \to \Box_2 \diamond_1 p$.

- (1.3.3 de LM. 8 Puntos) Considerar el lenguaje temporal básico y los frames $\langle Z, < \rangle$, $\langle Q, < \rangle$ y $\langle R, < \rangle$ (los enteros, quebrados y reales, ordenados con la relacion usual de "menor que" $<$). Sea $\mathrm{E}\varphi$ la abreviatura para la formula $P\varphi \vee \varphi \vee F\varphi$, y $\mathrm{A}\varphi$ la abreviatura para $G\varphi \wedge \varphi \wedge H\varphi$. Cuál de las siguientes formulas es válida en estos frames y pro qué?

(b) $(p \wedge Hp) \to FHp$,
(c) $(\mathrm{E}p \wedge \mathrm{E}\neg p \wedge \mathrm{A}(p \to Hp) \wedge \mathrm{A}(\neg p \to G\neg p)) \to \mathrm{E}(Hp \wedge G\neg p)$.

- (1.3.5 de LM. 8 Puntos) Demostrar que las siguientes fórmulas *no son* válidas construyendo un frame $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ que la refute.

(a) $\Box\bot$,

(b) $\Diamond p \to \Box p$,

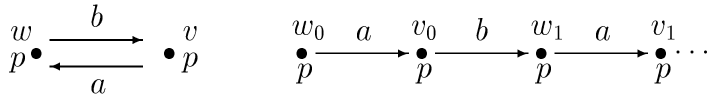
(c) $p \to \Box\Diamond p$,

(d) $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$.

Encontrar, en cada caso, una clase no vacía de frames en la cual sean válidas.

- (2.1.1 de LM. 5 Puntos) Supongamos que queremos un operador D con la siguiente definicion de satisfacción: para cualquier modelo $\mathcal{M}$ y para toda fórmula φ, $\mathcal{M}, w \models \mathrm{D}\varphi$ sii existe $u \neq w$ tal que $\mathcal{M}, u \models \varphi$. Decir (y demostrar) si el operador D es definible en el lenguage modal básico.

- (2.2.1 de LM. 5 Puntos) Sea un tipo de similaridad modal con dos diamantes $\langle a \rangle$ y $\langle b \rangle$, y con $\Phi = \{p\}$. Mostrar que los siguientes modelos son bisimilares.



- (2.2.4 de LM. 8 Puntos) Sea el operador binario until U. En un modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ definimos

$$\mathcal{M}, t \models U(\varphi, \psi) \quad \text{sii} \quad \begin{array}{l} \text{existe } v \text{ tal que } Rtv \text{ y } \mathcal{M}, v \models \varphi, \text{ y} \\ \text{para todo } u \text{ tal que } Rtu \text{ y } Ruv,\ \mathcal{M}, u \models \psi \end{array}$$

  Demostrar que U no puede ser definido en el lenguaje modal básico. (Ver hint en las fotocopias del libro.)

- (Nuevo, 8 Puntos). Demostrar que las siguientes formulas son tautologias, mediante tableaux $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$, $(\Box(p \wedge q) \wedge \Diamond p) \to \Diamond q$. Como podemos verificar esto usando RACER?. Dar un tableax abierto que muestre que $(\Diamond p \wedge \Diamond q) \to \Diamond(p \wedge q)$ no es una tautologia y definir el contramodelo asociado. Hacer lo mismo para $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$.

- (Nuevo, 5 Puntos) Considerar la $\Box'$-rule (en reemplazo de la $\Box$-rule)

$\Box'$-rule Si 1.$\Box\phi \in$ Label(w)
2.existe v tal que Label$((w, v)) = \{R\}$
y $\phi \notin$ Label$((v))$
entonces reemplazar Label(v) por Label$(v) \cup \{\Box\phi, \phi\}$.

Mostrar que ahora si podemos demostrar $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$. Podemos asegurar terminacion del algoritmo de tableax? Si contesta sí, dar una demostración. Si contesta no, dar un ejemplo de una fórmula en donde el algoritmo generaría un tableaux infinito.

- (Nuevo, 8 Puntos) Mostrar que $p \to \neg\Diamond p$ no define irreflexividad a nivel de frames. Decir que propiedad define y demostrarlo. (Hint: recordar que no necesariamente es una propiedad de la relacion de accesibilidad, sino que puede tambien hacer referencia a la valuación.)

3 Teórico-Prácticos

- - (15 Puntos Teóricos) Dar una traducción de bases de conocimiento en $\mathcal{ALCN}$ en lógica de primer orden, y demostrar que la traducción es correcta probando que preserva subsumption y instance checking.
  - (20 Puntos Prácticos) Implementar la traducción en algún lenguaje de programación. Tomar la base de conocimientos usada en la práctica (smith family), traducirla a primer orden y darla como input a Bliksem junto con la traducción de algunos de los queries. Comparar performance.

- - (10 Puntos Teóricos) Demostrar que la traduccion de formulas del BF en formulas hybridas conteniendo $\downarrow$ preserva satisfiabilidad en el modelo.

    Mas formalmente, recordar que el BF fragment se define sobre la signatura $\langle\{R\} \cup \mathsf{UNREL}, \mathsf{CONS}, \mathsf{VAR}\rangle$ (un símbolo de relación binario, símbolos de relación unarios, constantes y variables) como

    $$\mathsf{FORMS} = R(t, t') \mid P_j(t) \mid t = t' \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \exists x_i.(R(t, x_i) \wedge \varphi) \text{ (for } x_i \neq t\text{)},$$

    y que la traduccion se define como:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{HT}(R(t,t')) & = & @_t\Diamond t' \\
\mathrm{HT}(P_j(t)) & = & @_t p_j \\
\mathrm{HT}(t = t') & = & @_t t' \\
\mathrm{HT}(\neg\varphi) & = & \neg\mathrm{HT}(\varphi) \\
\mathrm{HT}(\varphi \wedge \psi) & = & \mathrm{HT}(\varphi) \wedge \mathrm{HT}(\psi). \\
\mathrm{HT}(\exists x.(R(t,x) \wedge \varphi)) & = & @_t\Diamond \downarrow x.\mathrm{HT}(\varphi).
\end{array}
$$

Demostrar que para cualquier modelo $\mathcal{M}$ y una asignacion g,

$$\mathcal{M}, g \models \varphi \text{ iff } \mathcal{M}, g, m \models \mathrm{HT}(\varphi) \text{ for any } w.$$

– (20 Puntos Prácticos) Implementar la traducción en algún lenguaje de programación. Encontrar 4 formulas del BF (no triviales, 2 satisfacibles, 2 inconsistentes) que HyLoRes pueda resolver; y 4 formulas del BF (simples, 2 satisfacibles, 2 inconsistentes) en las que HyLoRes no termine dentro de un tiempo razonable de ejecución. ($\sim$ dos minutos).