Lógicas Computacionales a Medida

Carlos Areces

Computational Logic Group

Institute for Logic, Language and Information

University of Amsterdam

`carlos@wins.uva.nl`

January 23, 2001

□. Lógica, con L Mayúscula

Por muchos años, decir "Lógica" era decir Lógica Clásica, y principalmente Lógica de Primer Orden (LPO).

- Alto poder expresivo.
- Simplicidad.
- Buen comportamiento sintáctico y semántico.
- Teoría de modelos desarrollada en detalle.

Pero, es LPO la <u>única</u> opción?

Es la mejor en <u>todos</u> los casos?

Veamos ...

□. Decidibilidad

T: El problema de determinar si una fórmula de LPO es satisfacible no es decidible.

D: [Gurevich, 1976] Por reducción de un "problema de tiling:" el problema de decidir si un conjunto finito de tiles $\mathfrak{T} = \{t_1, \ldots, t_n\}$ cubre la grilla $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es indecidible.

Para $h, v, t_1, \ldots, t_n$ símbolos de función unaria. Sea φ la conjuncion.

$$h(v(x)) = v(h(x)),$$

$$\bigvee\{t_i(x) = x \mid 1 \leq i \leq n\},$$

$$\bigwedge\{t_i(x) = x \to \neg(t_j(x) = x) \mid 1 \leq i < j \leq n\},$$

$$\bigvee\{t_i(x) = x \wedge t_j(h(x)) = h(x) \mid H(t_i, t_j)\},$$

$$\bigvee\{t_i(x) = x \wedge t_j(v(x)) = v(x) \mid V(t_i, t_j)\}.$$

Entonces $\forall x.\varphi(x)$ es satisf. sii $\mathfrak{T}$ cubre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

□. Poder Expresivo

El resultado de indecidibilidad anterior puede interpretarse como diciendo que LPO es demasiado expresiva: permite codificar problemas indecidibles.

Pero a la vez, LPO puede no tener el tipo de expresividad necesaria para una tarea determinada.

- Dominio finito,
- Dominio conexo,
- clausura transitiva,
- etc.

□. Fragmentos de LPO y Extensiones

- Prenex Normal Form Fragments.

  Decidibles: $\exists^*\forall\exists^*$, $\exists^*\forall^2\exists^*$, ...

  Indecidibles: $\forall^*\exists^*$, $\forall^3\exists^*$, $\forall\exists\forall$, ...

  $\rightsquigarrow$ Teorema de Clasificación. [Gurevich, 1969]

- Finite Variable Fragments.

  LPO^2 Decidible [Scott, 1962; Mortimer, 1975]

  LPO^k, $k \geq 3$ Indecidible.

  LPO^k, $k \geq 2$ Falla Interpolación.

  LPO^k, Caracterizables vía resultados de teoría de modelos (k-back-and-forth systems).

- Guarded Fragments

  Decidibles en forma robusta.

  No restringen # de variables o patrón de cuantificación.

□. Capturando Fragmentos vía Traducción

Las diferentes lógicas modales, introducidas inicialmente para "analizar nociones <u>intensionales</u> (Knowledge, Belief, Necessitation, etc.) no representables en lenguajes <u>extensionales</u> como LPO" pueden verse, en realidad, como fragmentos de lenguajes clásicos.

Pero introduzcamos LM (básico).

Def. Dado $\mathsf{PROP} = \{p_1, p_2, \ldots\}$,

$$\mathsf{FORMS} := \top \mid p_i \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \Diamond\varphi$$

Un modelo $\mathcal{M} = \langle M, R, V\rangle$ tienen M un conjunto no vacío, $R \subseteq M \times M$, $V : \mathsf{PROP} \to 2^M$. Para $m \in M$,

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{M}, m \Vdash \top & & \text{siempre} \\
\mathcal{M}, m \Vdash p_i & \text{sii} & m \in V(p_i) \\
\mathcal{M}, m \Vdash \neg\varphi & \text{sii} & \mathcal{M}, m \nVdash \varphi \\
\mathcal{M}, m \Vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 & \text{sii} & \mathcal{M}, m \Vdash \varphi_1 \text{ and } \mathcal{M}, m \Vdash \varphi_2 \\
\mathcal{M}, m \Vdash \Diamond\varphi & \text{ssi} & \exists m' \in M (mRm' \& \mathcal{M}, m' \Vdash \varphi)
\end{array}$$

□. Lógica Modal y Representación de Conocimiento

'And there is one among them that might have been foaled in the morning of the world. The horses of the Nine cannot vie with him; tireless, swift as the flowing wind. Shadowfax they called him. By day his coat glistens like silver; and by night it is like a shade, and he passes unseen.'

from "The Lord of the Rings," J. R. R. Tolkien

$$\texttt{shadowfax} \rightarrow \left(\begin{array}{c} \langle \mathit{foaled} \rangle \text{ things-existing-in-the-morning-of-the-world } \wedge \\ \text{tireless-things } \wedge \text{ swift-as-the-wind-things } \wedge \\ [\mathit{has\text{-}coat\text{-}like}] \text{ things-glistening-like-silver-by-day } \wedge \\ [\mathit{has\text{-}coat\text{-}like}] \text{ things-like-shades-by-night } \wedge [\mathit{pass\text{-}like}] \text{ unseen-things} \end{array} \right)$$

$$\text{horses-of-the-Nine} \rightarrow \neg \langle \mathit{vie} \rangle\ \texttt{shadowfax}.$$

□. Lógica Modal y Verificación de Sistemas

Lógicas modales con operadores temporales (F "en el futuro," G "simpre en el futuro," P "en el pasado," H "siempre en el pasado," etc.) pueden usarse para modelar la evolución de un sistema y verificar sus propiedades.

Propiedades SAFETY	Propiedades LIVENESS
• "Nada malo pasa"	• "Algo bueno va a pasar"
• Tienen la forma $\mathsf{G}\neg\varphi$	• Classificación
$\mathsf{G}\neg(Esc_1 \wedge Esc_2)$	– Guarantee: $\mathsf{F}\varphi$
• Son generalmente una invariante	– Persistence: $\mathsf{FG}\varphi$
• Permiten "inactividad"	– Responce: $\mathsf{GG}\varphi$
	...

□. Capturando Fragmentos vía Traducción II

Notar que un modelo modal $\langle M, R, V\rangle$ puede verse como un modelo de primer orden para la signatura $\{R, P_1, P_2, \ldots\}$ con R símbolo de relación binario, P_i símbolos de relación unarios.

Ahora, ...

Def. Traduccion Standard: ST: LM $\rightarrow$ LPO^2

$$\begin{array}{rcl} ST_x(p_j) & = & P_j(x_0),\ p_j \in \mathsf{PROP} \\ ST_x(\neg\varphi) & = & \neg ST_x(\varphi) \\ ST_x(\varphi \wedge \psi) & = & ST_x(\varphi) \wedge ST_x(\psi) \\ ST_x(\Diamond\varphi) & = & \exists y.(R(x,y) \wedge ST_y(\varphi)) \end{array}$$

T. Sea φ una fórmula modal, para todo modelo $\mathcal{M}, m \in M$,

$$\mathcal{M}, m \Vdash \varphi \textbf{ sii } \mathcal{M} \models ST_x(\varphi)[m]$$

$\square$. Traduciendo Otros Operadores

- Lógica Temporal

$$\mathcal{M}, m \Vdash \mathsf{P}\varphi \text{ sii } \exists m'.(m'Rm \;\&\; \mathcal{M}, m' \Vdash \varphi)$$

$$ST_x(\mathsf{P}\varphi) = \exists y.(yRx \wedge ST_y(\varphi))$$

- Until

$$\mathcal{M}, m \Vdash \mathsf{U}(\varphi, \psi) \text{ sii } \exists m'.[mRm' \;\&$$
$$\mathcal{M}, m' \Vdash \varphi \;\&\; \forall m''.(mRm''Rm' \rightarrow \mathcal{M}, m'' \Vdash \psi)]$$

$$ST_x(\mathsf{U}(\varphi, \psi)) = \exists y.[xRy \wedge$$
$$ST_y(\varphi) \wedge \forall z.((xRz \wedge zRy) \rightarrow ST_z(\psi))]$$

- Operador Universal

$$\mathcal{M}, m \Vdash \mathsf{A}\varphi \text{ sii } \forall m'.\mathcal{M}, m' \Vdash \varphi$$

$$ST_x(\mathsf{A}\varphi) = \forall x.ST_x(\varphi)$$

□. Lógicas Modales como Fragmentos de LPO

Los fragmentos "modales" de LPO tienen propiedades interesantes:

- Son pequeños: Lo que los hace útiles como "ladrillos" básicos de construcción.
- Son simples: complejidad usual entre NP y ExpTime.
- Son muchos y diversos.
- Son robustos: no sólo un determinado lenguaje $\mathcal{L}$ tiene buenas propiedades sino también extensiones y restricciones.
- Son flexibles: dado que su semántica está dada en estructuras relacionales (modelos de Kripke) se adaptan a muchas situaciones.

□. Inferencia en Lógica Modal

Desde un punto de vista computacional, uno de los temas centrales es estudiar métodos para decidir, dado $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathrm{LM}$, si $\Gamma \models \varphi$.

Notemos que, dado que LM puede verse como un fragmento de LPO, podemos usar métodos clásicos:

$$\underbrace{\Gamma \models \varphi}_{(1)} \quad \text{sii} \quad \underbrace{\forall x.ST_x(\Gamma) \models_{\mathrm{LPO}} \forall x.ST_x(\varphi)}_{(2)}$$

Y podríamos intentar aplicar métodos de resolución de primer orden a (2) para investigar (1).

Pero recordemos que (2) es <u>indecidible</u>! mientras que para muchas lógicas modales $\models$ es decidible (y de baja complejidad).

□. Resolución para Lógicas Modales

Recordemos primero las ideas básicas del metodo de resolución para LP [Robinson, 1965].

Para chequear si φ es inconsistente, escribir φ en forma normal conjuntiva.

$$\varphi = \bigwedge_{l \in L} \bigvee_{m \in M} \psi(l, m)$$

Definir

$$\mathit{ClSet}(\varphi) = \{\{\psi(l,m) \mid m \in M\} \mid l \in L\}$$

Definir $\mathit{ClSet}^*(\varphi)$ como el menor conjunto conteniendo $\mathit{ClSet}(\varphi)$ y clausurado bajo la regla

$$\frac{Cl_1 \cup \{N\} \in \mathit{ClSet}^*(\varphi) \quad Cl_2 \cup \{\neg N\} \in \mathit{ClSet}^*(\varphi)}{Cl_1 \cup Cl_2 \in \mathit{ClSet}^*(\varphi)} \ \text{(RES)}$$

Si $\{\} \in \mathit{ClSet}^*(\varphi)$ entonces φ es inconsistente.

$\Box$. Resolucion para Lógicas Modales II

En los '80–'90 se presentaron diferentes métodos de resolución directa [Fariñas del Cerro; Enjalbert; Mints; etc.]. Sean $\alpha, \beta, \kappa, \delta_1, \delta_2$ cláusulas y Φ, Ψ conjuntos de cláusulas

Axioms	
(A1) $\Sigma(p, \neg p) \to \perp$ (A2) $\Sigma(\perp, \alpha) \to \perp$	
Σ-Rules	**Γ-Rules**
$(\vee)\ \dfrac{\Sigma(\alpha, \beta) \to \kappa}{\Sigma(\alpha \vee \delta_1, \beta \vee \delta_2) \to \kappa \vee \delta_1 \vee \delta_2}$	$(\Diamond 1)\ \dfrac{\Sigma(\alpha, \beta) \to \kappa}{\Gamma(\Diamond(\alpha, \beta, \Phi)) \to \Diamond(\alpha, \beta, \kappa, \Phi)}$
$(\Box\Diamond)\ \dfrac{\Sigma(\alpha, \beta) \to \kappa}{\Sigma(\Box\alpha, \Diamond(\beta, \Psi)) \to \Diamond(\beta, \kappa, \Psi)}$	$(\Diamond 2)\ \dfrac{\Gamma(\alpha) \to \beta}{\Gamma(\Diamond(\alpha, \Phi)) \to \Diamond(\beta, \alpha, \Phi)}$
$(\Box\Box)\ \dfrac{\Sigma(\alpha, \beta) \to \kappa}{\Sigma(\Box\alpha, \Box\beta) \to \Box\kappa}$	$(\vee)\ \dfrac{\Gamma(\alpha) \to \beta}{\Gamma(\alpha \vee \kappa) \to \beta \vee \kappa}$
	$(\Box)\ \dfrac{\Gamma(\alpha) \to \beta}{\Gamma(\Box\alpha) \to \Box\beta}$

$\Box$. Un Ejemplo

1. $(\Diamond(\underline{p}, \underline{\neg p} \vee \Box r \vee q), \Box\neg q, \Box\Diamond\neg r)$

   by (A1), ($\vee$) and ($\Diamond$1)

2. $(\Diamond(p, \neg p \vee \Box r \vee q, \Box r \vee \underline{q}), \Box\underline{\neg q}, \Box\Diamond\neg r)$

   by (A1), ($\vee$) and ($\Box\Diamond$)

3. $(\Diamond(p, \neg p \vee \Box r \vee q, \Box r \vee q, \Box\underline{r}), \Box\neg q, \Box\Diamond\underline{\neg r})$

   by (A1) and two applications of ($\Box\Diamond$)

4. $(\Diamond(p, \neg p \vee \Box r \vee q, \Box r \vee q, \Box r, \Diamond(\neg r, \bot)), \Box\neg q, \Box\Diamond\neg r)$

   by the simplification $\Diamond\bot = \bot$, (A2) and ($\Diamond$1)

5. $\bot$

Que pasó con el “One-dumb-rule-spirit”

del método de resolución?

□. Cual es el Problema?

El método anterior resuelve literales dentro de un "patrón de modalidades." Debe entonces

- Analizar los diferentes patrones que pueden aparecer.
- Codificar el resultado de un paso de resolución adecuadamente dentro del patrón.

Solución. Elegir el lenguaje adecuado. Extender el poder expresivo de forma de realizar resolución sólo <u>fuera</u> <u>de</u> <u>modalidades</u>!

Dado un conjunto $\mathsf{LAB} = \{l_1, l_2, \ldots\}$ de etiquetas

$l\!:\!\varphi$ significa "φ se satisface en l".

$R(l_1, l_2)$ significa "la etiqueta l_2 sigue a l_1".

□ Resolviendo "Por Afuera"

Dos reglas de resolucion:

$$\text{(RES)} \qquad \frac{Cl_1 \cup \{t\!:\!\varphi\} \quad Cl_2 \cup \{t\!:\!\neg\varphi\}}{Cl_1 \cup Cl_2}$$

$$(\text{RES}_\Box) \qquad \frac{Cl_1 \cup \{t_1\!:\![R]\varphi\} \quad Cl_2 \cup \{(t_1, t_2)\!:\!R\}}{Cl_1 \cup Cl_2 \cup \{t_2\!:\!\varphi\}}$$

Reglas de "clausificación."

$$(\wedge) \qquad \frac{Cl \cup \{t\!:\!\varphi_1 \wedge \varphi_2\}}{\begin{array}{c} Cl \cup \{t\!:\!\varphi_1\} \\ Cl \cup \{t\!:\!\varphi_2\} \end{array}}$$

$$(\neg\wedge) \qquad \frac{Cl \cup \{t\!:\!\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)\}}{Cl \cup \{t\!:\!\sim\!\varphi_1, t\!:\!\sim\!\varphi_2\}}$$

$$(\neg[R]) \qquad \frac{Cl \cup \{t\!:\!\neg[R]\varphi\}}{\begin{array}{c} Cl \cup \{(t, n)\!:\!R\} \\ Cl \cup \{n\!:\!\sim\!\varphi\} \end{array}}, \text{ donde } n \text{ es nueva.}$$

$\Box$ El Ejemplo Otra Vez

1.	$\{i:\underline{\neg\Box}\neg(p\wedge\neg(p\wedge\neg\Box r\wedge\neg q))\}, \{i:\Box\neg q\},\ \{i:\Box\neg\Box r\},$	por $(\neg\Box)$
2.	$\{R(i,j)\}, \{j:(p\underline{\wedge}\neg(p\wedge\neg\Box r\wedge\neg q))\}, \{i:\Box\neg q\},\ \{i:\Box\neg\Box r\},$	por $(\wedge)$
3.	$\{R(i,j)\}, \{j:p\}, \{j:\underline{\neg}(p\underline{\wedge}\neg\Box r\underline{\wedge}\neg q)\}, \{i:\Box\neg q\},\ \{i:\Box\neg\Box r\},$	por $(\neg\wedge)$
4.	$\{R(i,j)\}, \{j:\underline{p}\}, \{j:\underline{\neg p}, j:\Box r, j:q\}, \{i:\Box\neg q\},\ \{i:\Box\neg\Box r\},$	por (RES)
5.	$\{R(i,j)\}, \{j:\Box r, j:q\}, \{i:\underline{\Box}\neg q\},\ \{i:\Box\neg\Box r\},$	por $(\Box)$
6.	$\{j:\Box r, j:\underline{q}\}, \{j:\underline{\neg q}\},\ \{j:\neg\Box r\},$	por (RES)
7.	$\{j:\underline{\Box r}\},\ \{j:\underline{\neg\Box r}\},$	por (RES)
8.	$\{\}.$	

□ El Resultado?

Un método de resolución más efectivo (y, en mi opinión, elegante) para un lenguaje aun más expresivo que el original.

Además, el sistema se extiende fácilmente para diferentes clases de modelos.

$$(\mathbf{T}) \qquad \frac{Cl \cup \{t:\Box\varphi\}}{Cl \cup \{t:\varphi\}}$$

$$(\mathbf{D}) \qquad \frac{Cl \cup \{t:\Box\varphi\}}{Cl \cup \{t:\neg\Box{\sim}\varphi\}}$$

y otros lenguajes.

$$(\downarrow) \qquad \frac{Cl_1 \cup \{t:\downarrow x.\varphi\}}{Cl_1 \cup \{t:\varphi[x/t]\}}$$

$$(\neg\downarrow) \qquad \frac{Cl_1 \cup \{t:\neg\downarrow x.\varphi\}}{Cl_1 \cup \{t:\downarrow x.{\sim}\varphi\}}$$

□ Para Terminar: Logic Engineering!

Ingeniero: s. el que diseña o crea, o pone en uso práctico [...]

Como su nombre lo indica, Logic Engineering es el estudio de cómo diseñar nuevos lenguajes formales, con buenas propiedades como decidibilidad, el poder expresivo adecuado, métodos de razonamiento efectivos, buenas propiedades metalógicas (completitud, interpolación, etc.) para un problema determinado (una cierta tarea de modelización o verificación, un cierto método de inferencia, etc.)

Lógicas a Medida!

Que "talle" necesita? (⌣̈)