Lógicas Modales Dinámicas

Clase #1

Carlos Areces & Raul Fervari

Febrero 2024, Río Cuarto, Argentina

Generalidades

- En este curso vamos a hablar principalmente de lógicas modales. Luego de una introducción general nos vamos a enfocar en operadores dinámicos.
- En particular, vamos a enfocarnos en dos temas: expresividad y axiomatización de operadores dinámicos.
- El curso va a ser principalmente teórico. Hay aplicaciones (muchas) pero no nos da el tiempo como para charlarlas en detalle (en el asado?).
- Contenidos necesarios para la cursada:
  - Buenos conocimientos de lógica proposicional.
  - Nociones básicas de lógica de primer orden.
  - (Algún conocimiento de lógica modal es un plus).

Temas a cubrir durante el curso

- Clase 1:
  - Introducción a Lógicas Modales y Dinámicas.
  - Sintaxis y Semántica de la Lógica Modal Básica (LMB).
  - Extensiones de LMB.
  - Bisimulaciones y Poder Expresivo.
  - Axiomatizaciones y Propiedades.
- Clase 2:
  - Lógica de Anuncios Públicos (LAP).
  - Poder expresivo.
  - Falla de sustitución uniforme.
  - Completitud de LMB.
  - Axiomatización de LAP mediante axiomas de reducción.

Temas a cubrir durante el curso

- Clase 3:
  - Sintaxis y semántica del operador de sabotaje.
  - Bisimulaciones y Poder Expresivo.
  - Falla de sustitución uniforme.
  - Variantes del operador.
- Clase 4:
  - Lógica Modal Híbrida.
  - Axiomatización para el operador de sabotaje mediante herramientas de lógica híbrida.
  - Temas actuales en Lógicas Modales Dinámicas.

¿Qué es lo que vamos a ver?

- Usualmente hablamos de La Lógica: lógica de primer orden.

$$\forall x.(madruga(x) \to \exists y.(dios(y) \land ayuda(y,x)))$$

- Aunque también sabemos que existe la lógica proposicional:

$$comerChicle \to \neg cruzarLaCalle$$

- ¿Cuántas lógicas hay? ¿Dos?

Las Lógicas Modales: Qué son?

- Intuitivamente, son lenguaje muy cómodo para describir grafos. ¿Servirá para algo más? Ya veremos...
- Algunas ventajas:
  - las lógicas modales son más expresivas que la lógica proposicional,
  - mientras que decidir si una fórmula es cierta en lógica de primer orden es indecidible,
  - en la "lógica modal básica" el problema es computable! (para los que sepan de qué se trata, es PSPACE-complete).

Una Familia de Lenguajes

- La Lógica Modal investiga el espectro de posibles lenguajes que pueden usarse para describir estructuras relacionales.
- Algunas preguntas que uno se puede hacer son:
  - ¿Cuáles son los límites de expresividad de estos lenguajes? Es decir, ¿podemos decir más o menos cosas que con otras lógicas?
  - ¿Cómo puedo caracterizar los teoremas de la lógica?
  - ¿Podemos definir algoritmos de inferencia para estos lenguajes? ¿Cuán eficientes son?
- Otra perspectiva es mirarlos desde el punto de vista del diseño de una lógica. Dado un problema en particular:
  - ¿Qué lenguaje lógico me resulta más cómodo de usar?
  - ¿Cuál tiene un buen algoritmo de inferencia?
  - ¿Qué operadores necesito?

Las lógicas modales son antiguas

- Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.) ya era un lógico modal.
- Además del “silogismo clásico”, Aristóteles discute el silogismo modal que resulta al agregar las calificaciones “necesariamente” y “posiblemente” a premisas y conclusiones, de varias maneras.
- De hecho, ya discute diferentes lógicas modales, ya que considera dos posibles definiciones de “posiblemente P”:
  - “posiblemente P” como equivalente a “no necesariamente no P”.
  - “posiblemente P” como equivalente a “no necesariamente P y no necesariamente no P”.

Rini, Adriane.
Aristotle’s Modal Proofs: Prior Analytics
A8–22 en *Predicate Logics*, Dordrecht: Springer, 2011.

Las lógicas modales son simples

- Tomamos el lenguaje de la Lógica Proposicional y agregamos los operadores modales (esto es el lenguaje modal básico LMB):

$$\varphi, \psi := p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \Diamond\varphi \mid \Box\varphi$$

- Clásicamente,
  - $\Diamond\varphi$ significa "φ es posible".
  - $\Box\varphi$ significa "φ es necesario".
- Ahora, ¡discutamos!
  - ¿Debería ser válida $\Box\varphi \to \varphi$?
  - ¿Y qué tal $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$?
  - ...

Las lógicas modales son flexibles

- "Posibilidad" y "Necesidad" son solo dos de las muchas opciones posibles...
  - Lógica Deóntica

    $O\varphi$ Es obligatorio que φ
    $P\varphi$ Es permitido que φ
    $F\varphi$ Es prohibido (forbidden) que φ
  - Lógica Temporal

    $G\varphi$ Siempre será (going to be) el caso que φ
    $F\varphi$ Será el caso (future) que φ
    $H\varphi$ Siempre ha sido (has been) el caso que φ
    $P\varphi$ Ha sido el caso (past) que φ
  - Lógica Doxástica

    $B_x\varphi$ x cree (believes) que φ
  - ...

Luego las cosas se complicaron

- Sin una semántica, era difícil argumentar, por ejemplo, cuando dos axiomas eran independientes.
- Entra Kripke (y Carnap; McKinsey, Jónsson & Tarski; Prior & Meredith; Kanger; Hintikka; Montague; y Beth circa 1960)
  - $\Box\varphi$ es verdadero (es decir, "es verdadero que φ es necesario") si φ es verdadero en "todas los mundos posibles".
  - Considera una estructura $\langle W, V\rangle$ donde W es un conjunto de "mundos posibles" y V una función que asigna una valuación proposicional a cada mundo (es decir, $V(w) \subseteq \mathsf{PROP}$).

- Qué pasa con $\Box\varphi \to \varphi$? ✓
- Y con $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$? ✓

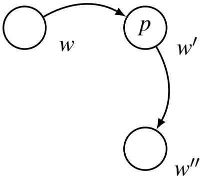
La relación de accesibilidad

Introduciendo una relación de accesibilidad entre mundos posibles, es posible definir lógicas más débiles.
Hoy en día, un modelo de Kripke es una estructura $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ donde W es un conjunto no vacío, $R \subseteq W^2$ y $V : \mathrm{PROP} \to \wp(W)$.

- Es decir, un grafo dirigido, etiquetado, o modelo relacional.

$\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ si y sólo si $\forall w'.(Rww' \to \mathcal{M}, w' \models \varphi)$

Las fórmulas se evalúan en un punto de un modelo, $\mathcal{M}, w$ se llama un modelo punteado.

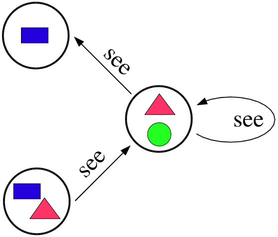


Ejemplos

- $\mathcal{M}, w \models \Box p \to p$? ✗
- $\mathcal{M}, w \models \Box p \to \Box\Box p$? ✗

Lenguaje Modal: un lenguaje para grafos decorados

Pensemos en un grafo orientado, con figuras dentro de cada nodo:



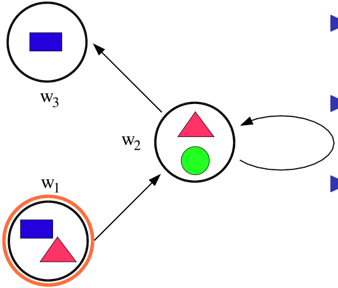
Queremos describir qué figuras un nodo puede "ver".

Desde la perspectiva de un nodo n, el significado de los operadores modales va a ser:

- $\langle see \rangle x$ = "n puede ver la figura x en algún vecino".
- $[see]x$ = "n puede ver la figura x en todos sus vecinos".

Lenguaje Modal: un lenguaje para grafos decorados

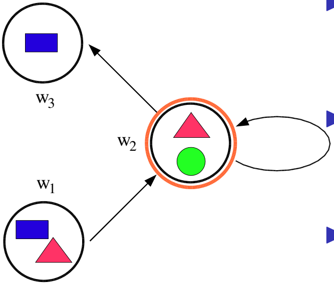
Ahora podemos hacerle “preguntas” al modelo:



- Ve w_1 un rectángulo?
  $\mathcal{M}, w_1 \models \langle see \rangle rectangle$? NO
- ... y en dos “pasos”?
  $\mathcal{M}, w_1 \models \langle see \rangle \langle see \rangle rectangle$? SI
- Ve w_1 un círculo y un triángulo?
  $\mathcal{M}, w_1 \models \langle see \rangle circle \wedge \langle see \rangle triangle$? SI

Lenguaje Modal: un lenguaje para grafos decorados

Ahora podemos hacerle "preguntas" al modelo:



- Ve w_2 un círculo y un rectángulo?
  $\mathcal{M}, w_2 \models \langle see \rangle circle \wedge \langle see \rangle rectangle$?
  SI
- ... y en el mismo vecino?
  $\mathcal{M}, w_2 \models \langle see \rangle (circle \wedge rectangle)$?
  NO
- w_2 ve círculos en todos lados?
  $\mathcal{M}, w_2 \models [see] circle$? NO

Posibles Aplicaciones

- Los lenguajes de la familia de las lógicas modales pueden usarse en áreas muy diversas:
  - Verificación de Software y Hardware.
  - Representación de Conocimientos.
  - Linguística Computacional.
  - Inteligencia Artificial.
  - Filosofía.
  - Epistemología.
  - ...
- **¿Por qué?** Muchas cosas pueden ser representadas como grafos (i.e., estructuras relacionales).

  Y como vimos, los lenguajes modales fueron desarrollados especialmente para razonar sobre grafos y describir sus propiedades.

No Estamos Solos

- Aunque no parezca, estamos haciendo Lógica Clásica.
- Los lenguajes que estuvimos discutiendo son fragmentos del lenguaje de primer (o segundo) orden. Lo único que hicimos fue elegir sólo una parte del lenguaje que necesitábamos para una aplicación dada.
- Esta es exactamente la forma en que vemos hoy por hoy a los lenguajes modales, como una forma de investigar fragmentos particularmente interesantes de los lenguajes clásicos.
- Donde "interesantes" significa
  - Decidibles, expresivos, de "baja" complejidad, modulares, etc.

Lenguaje Modal Básico: sintaxis y semántica

Vamos a definir ahora la sintaxis formal del lenguaje modal básico.

- La signatura del lenguaje va a consistir de dos conjuntos infinitos numerables, disjuntos entre sí:
  - $\mathrm{PROP} = \{p_1, p_2, \dots\}$, el conjunto de *variables proposicionales*.
  - $\mathrm{REL} = \{r_1, r_2, \dots\}$, el conjunto de *símbolos de relación*.
- El conjunto de fórmulas FORM en la signatura $\langle \mathrm{PROP}, \mathrm{REL} \rangle$ está definido como:

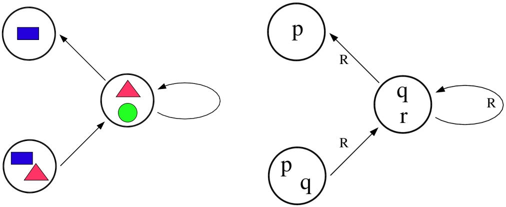
$$\mathrm{FORM} := p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \langle r \rangle \varphi,$$

  en donde $p \in \mathrm{PROP}$, $r \in \mathrm{REL}$ y $\varphi, \psi \in \mathrm{FORM}$.
- El operador $[r]$ se define como $[r]\varphi = \neg\langle r \rangle\neg\varphi$ (de igual forma que $\forall x.\varphi$ es $\neg\exists x.\neg\varphi$)

Lenguaje Modal Básico: sintaxis y semántica

Para poder definir formalmente la semántica, vamos primero a ver qué es un modelo de Kripke.

- Un modelo de Kripke es una estructura $\langle W, \{R\}_{r \in \mathsf{REL}}, V \rangle$ donde
  - W es un conjunto no vacío de elementos.
  - R_r es una relación binaria en W.
  - $V : \text{PROP} \rightarrow \wp(W)$ es una función de valuación ($V(p)$ es el conjunto de elementos donde vale p).
- Intuitivamente, un modelo de Kripke es un grafo dirigido con “decoraciones”.



Lenguaje Modal Básico: sintaxis y semántica

Ahora sí, podemos definir la semántica de la lógica modal básica:

- Dado un modelo $\mathcal{M} = \langle W, \{R\}_{r \in \mathsf{REL}}, V \rangle$ y un estado $w \in W$, la relación de satisfacibilidad es

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{M}, w \models p & \text{sii} & w \in V(p), \text{ para } p \in \text{PROP} \\
\mathcal{M}, w \models \neg\varphi & \text{sii} & \mathcal{M}, w \not\models \varphi \\
\mathcal{M}, w \models \varphi \wedge \psi & \text{sii} & \mathcal{M}, w \models \varphi \text{ y } \mathcal{M}, w \models \psi \\
\mathcal{M}, w \models \langle r \rangle \varphi & \text{sii} & \exists w' \in W \text{ tq } R_r(w, w') \text{ y } \mathcal{M}, w' \models \varphi
\end{array}
$$

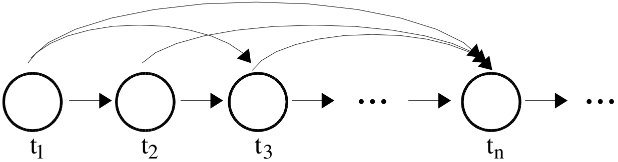
- Vamos a decir que φ es válida en un modelo $\mathcal{M}$ sii en todos los estados $w \in W$ vale $\mathcal{M}, w \models \varphi$, y lo denotamos $\mathcal{M} \models \varphi$.
- Si $\mathcal{M} \models \varphi$ para todo $\mathcal{M} \in \mathbb{C}$, para $\mathbb{C}$ una clase de modelos, decimos que φ es válida en $\mathbb{C}$ y lo denotamos $\models_{\mathbb{C}} \varphi$.

Extensiones

- Volviendo a la pregunta de cuántas lógicas había, ya sabemos que la respuesta no es dos.
- Como se podrán imaginar, tampoco es tres.
- Así como existe el operador $\langle r \rangle$, tenemos un amplio "menú" de operadores modales para usar.
- Al combinar estos operadores, conseguimos diferentes lógicas

Extensiones: Operador Inverso

- Pensemos en la siguiente “línea temporal”



- Claramente, esta estructura puede ser vista como un modelo de Kripke.
- El operador $\langle r \rangle$ significa “en algún momento en el futuro”.
- Y el operador $[r]$ dice “en todo momento futuro”.
- Con este lenguaje, ¿podremos decir “en algún momento en el pasado”?

Extensiones: Operador Inverso

- La necesidad de expresar esto, nos lleva a agregar el operador inverso, que vamos a notar como $\langle r \rangle^{-1}$.
- Para extender la lógica modal básica con este operador, primero tenemos que agregarlo a nuestra sintaxis:

$$\text{FORM} := p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \langle r \rangle\varphi \mid \langle r \rangle^{-1}\varphi$$

- ¿Necesitamos hacer algún cambio en los modelos?
- Parecería que no...
- Ahora lo que nos falta es extender la semántica.

Extensiones: Operador Inverso

- La relación de satisfacibilidad que teníamos antes era:

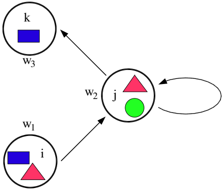
$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}, w \models p & \text{sii} & w \in V(p), \text{ para } p \in \textsc{prop} \\ \mathcal{M}, w \models \neg\varphi & \text{sii} & \mathcal{M}, w \not\models \varphi \\ \mathcal{M}, w \models \varphi \wedge \psi & \text{sii} & \mathcal{M}, w \models \varphi \text{ y } \mathcal{M}, w \models \psi \\ \mathcal{M}, w \models \langle r \rangle\varphi & \text{sii} & \exists w' \in W \text{ tq } R_r(w, w') \text{ y } \mathcal{M}, w' \models \varphi \end{array}$$

- ¿Cómo podemos hacer para definir el comportamiento de este nuevo operador?
- Tenemos que agregar el caso del operador a la definición:

$$\mathcal{M}, w \models \langle r \rangle^{-1}\varphi \quad \text{sii} \quad \exists w' \in W \text{ tq } R_r(w', w) \text{ y } \mathcal{M}, w' \models \varphi$$

Extensiones: Lógicas Híbridas

Volvamos al ejemplo de las figuras geométricas. ¿Cómo hacemos para decir?



- ¿Puede w_1 verse a sí mismo?
- ¿Son w_1 y w_2 estados distintos?

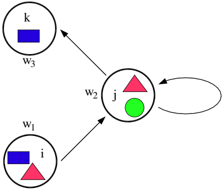
- Lo que necesitamos para expresar esto es poder nombrar mundos, y una noción de igualdad.

Extensiones: Lógicas Híbridas

HL(@) es la extensión de la lógica modal básica con:

- nombres (nominales): son un nuevo conjunto de símbolos atómicos, que representan a los estados. La clave es que cada nominal tiene que ser cierto en un único estado. En general se escriben como $i, j, k, \ldots$
- @: el operador 'at'. $@_i\varphi$ es verdadera sii φ es verdadera en el mundo denotado por i.

Ahora podemos expresar…



- ¿Puede w_1 verse a sí mismo?
  $@_i\langle see\rangle i$
- ¿Son w_1 y w_2 estados distintos?
  $@_i\neg j$

Extensiones: Lógicas Híbridas

Entonces, la definición de la sintaxis es:

- A la signatura $\langle \text{PROP}, \text{REL} \rangle$ que teníamos antes, le tenemos que agregar un nuevo conjunto $\text{NOM} = \{i, j, k, \dots\}$ de nominales.
- Las fórmulas bien formadas ahora son:

$$\text{FORM} := p \mid i \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \langle r \rangle \varphi \mid @_i\varphi$$

  en donde $p \in \text{PROP}$, $r \in \text{REL}$, $i \in \text{NOM}$ y $\varphi, \psi \in \text{FORM}$.
- ¿Hay que hacer algún cambio en lo modelos? ¿Cómo es la semántica de HL(@)?
- Ejercicio!

Lógicas Modales como Fragmentos de Primer Orden

$$
\begin{array}{lcl}
\mathsf{ST}_x(p) & = & P(x) \\
\mathsf{ST}_x(\neg\varphi) & = & \neg\mathsf{ST}_x(\varphi) \\
\mathsf{ST}_x(\varphi \wedge \psi) & = & \mathsf{ST}_x(\varphi) \wedge \mathsf{ST}_x(\psi) \\
\mathsf{ST}_x(\langle r\rangle\varphi) & = & \exists y.(R_r(x,y) \wedge \mathsf{ST}_y(\varphi))
\end{array}
$$

- $\mathsf{ST}_x(\varphi)$ le hace corresponder, a cada fórmula φ, una fórmula de primer orden con exactamente una variable libre x.
- Esta variable libre da cuenta del punto de evaluación en la semántica modal (recordar la "perspectiva interna").

Teorema

Para toda fórmula φ de la lógica modal básica, todo modelo $\mathcal{M}$, todo w en el dominio de $\mathcal{M}$ y toda asignación g,

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \textit{ sii } \mathcal{M}, g[x \mapsto w] \models \mathsf{ST}_x(\varphi)$$

Extendiendo la traducción estándar

- Es fácil extender la traducción estándar a otros operadores modales y transferir resultados.

Ejemplo

1. $\mathcal{M}, w \models \langle r \rangle^{-1}\varphi$ sii existe v tal que $R_r vw$ y $\mathcal{M}, v \models \varphi$

   $\mathsf{ST}_x(\langle r \rangle^{-1}\varphi) \equiv \exists y.R_r(y,x) \wedge \mathsf{ST}_y(\varphi)$

2. $\mathsf{ST}_x(@_i\varphi) \equiv$ ... ??

Algunas convenciones

- Para simplificar las cosas, muchas veces usaremos una lógica con un solo operador modal $\langle r \rangle$ (y su dual $[r]$).
- Cuando esto ocurre, denotamos a esos operadores con $\Diamond$ y $\Box$ respectivamente.
- Llamanos a esta lógica, la Lógica Modal Básica (LMB).
- Los modelos son de la forma $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, siendo R la única relación de accesibilidad sobre la que interpretamos a $\Diamond$ y a $\Box$.

Bisimulaciones

Isomorfismos, equivalencia estructural

- ¿Cuál es la noción de igualdad para la lógica de primer orden?
- Estamos acostumbrados a que *isomorfo* signifique *equivalente*
- Con lo cual no es sorpresa que…

Teorema

Si f es un isomorfismo entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$, entonces, para toda g y toda formula de Primer Orden φ,

$$\mathcal{M}, g \models \varphi \quad \textit{sii} \quad \mathcal{N}, f \circ g \models \varphi$$

Demostración.

Fácil, por inducción estructural en φ □

Ojo ¡Prestar atención al sentido de la implicación!

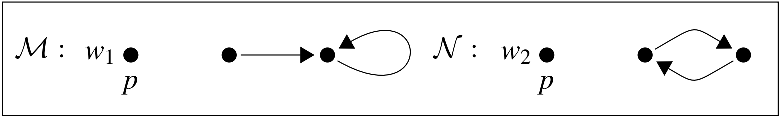
¿Y por modal cómo andamos?

- Por simple transferencia, si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son isomorfos, entonces para cada w existe un w' tal que

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \quad \text{sii} \quad \mathcal{N}, w' \models \varphi$$

- ¿Será lo mejor que podemos decir?

Ejemplo – ¿Son modalmente distinguibles $\mathcal{M}, w_1$ y $\mathcal{N}, w_2$?



Hacia una noción de equivalencia modal…

- La noción de isomorfismo considera los modelos “en su totalidad”
  - Es razonable para LPO: la extensión de una sentencia es todo el dominio o el conjunto vacío
- ¿Tiene sentido hacer lo mismo en modal?

Bisimulaciones

Definición

Una *bisimulación* (para el lenguaje modal básico) entre dos modelos $\langle W, R, V\rangle$ y $\langle W', R', V'\rangle$ es una relación no-vacía $Z \subseteq W \times W'$ tal que si wZw', entonces:

(atom) $w \in V(p)$ sii $w' \in V'(p)$ para todo p

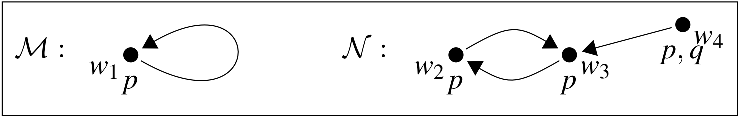
(zig) Si wRv, entonces existe v' tal que $w'R'v'$ y vZv'

(zag) Si $w'R'v'$, entonces existe v tal que wRv y vZv'

Si existe una bisimulación Z entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$ tal que wZw', decimos que $\mathcal{M}, w$ y $\mathcal{M}', w'$ son *bisimilares* (notación: $\mathcal{M}, w \leftrightarrows \mathcal{M}', w'$).

Bisimulaciones (ejemplo)

Ejemplo



$$Z = \{(w_1, w_2), (w_1, w_3)\}$$

- Z es una bisimulación, ¿por qué?

Invarianza bajo bisimulaciones

Teorema

Si $\mathcal{M}, w$ y $\mathcal{N}, w'$ son bisimilares, entonces para toda fórmula φ de la lógica modal básica, $\mathcal{M}, w \models \varphi$ sii $\mathcal{N}, w' \models \varphi$.

Demostración.

Por inducción en φ, suponiendo wZw':

- Caso base: directo por la cláusula (atom)
- $\neg, \wedge, \ldots$: directo por hipótesis inductiva
- $\varphi = \Diamond\psi$:
  - Si $\mathcal{M}, w \models \Diamond\psi$, entonces
    - existe v tal que wRv y $\mathcal{M}, v \models \psi$
    - luego, por (zig), existe v' tal que $w'R'v'$ y vZv'
    - y por HI, $\mathcal{N}, v' \models \psi$, con lo cual $\mathcal{N}, w' \models \Diamond\psi$
  - Si $\mathcal{N}, w' \models \Diamond\psi$, análogo con (zag)

$\square$

¿Y la vuelta?

Teorema

Si $\mathcal{M}, w$ y $\mathcal{N}, w'$ son bisimilares, entonces para toda fórmula φ de la lógica modal básica, $\mathcal{M}, w \models \varphi$ sii $\mathcal{N}, w' \models \varphi$.

$\boxed{\text{¿Valdrá la vuelta de la implicación?}}$

A veces vale la vuelta…

Teorema (Hennessy-Milner)

Si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son modelos cuyas relaciones tienen imagen finita, $\mathcal{M}, w$ y $\mathcal{N}, v$ son bisimilares sii son modalmente equivalentes.

Demostración.

Basta ver que $Z := \{(w, v) \mid \text{para todo } \varphi, \mathcal{M}, w \models \varphi \text{ sii } \mathcal{N}, v \models \varphi\}$ es una bisimulación. Para ello, suponemos wZv:

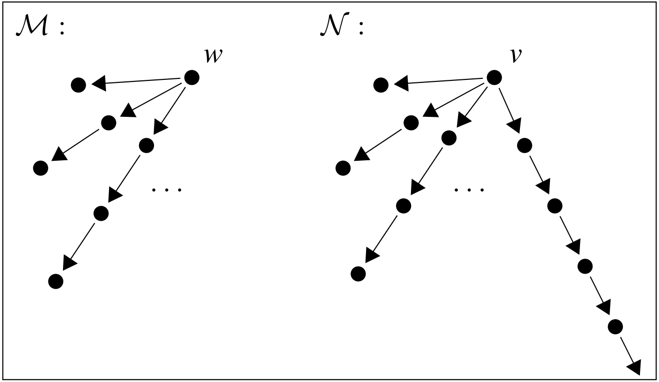
(atom) wZv implica $\mathcal{M}, w \models p$ sii $\mathcal{N}, v \models p$ para todo p

(zig)/(zag) Razonamos por el absurdo:

- Sea un wRw' tal que ningún v' cumple vRv' y $w'Zv'$
- Definamos $S := \{v' \mid vRv'\} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ $(k > 0)$
- Existe $\{\varphi_1 \ldots, \varphi_k\}$ con $\mathcal{M}, w' \models \varphi_i$ y $\mathcal{N}, v_i \not\models \varphi_i$
- $\mathcal{M}, w \models \Diamond(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)$ y $\mathcal{N}, v \not\models \Diamond(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)$
- Absurdo! $\square$

…pero no siempre!

Ejemplo – Modalmente equivalentes pero no bisimilares



Axiomatizaciones

Introducción a Completitud

- Una lógica se puede especificar semántica o sintácticamente.
- El enfoque semántico se corresponde con la noción de satisfacibilidad de una fórmula (o validez $\models \varphi$).
- El enfoque sintáctico se corresponde con la noción de teorema $\vdash \varphi$ (usualmente definidos en términos de un sistema axiomático).
- Surge la pregunta de cuándo estas dos alternativas definen la misma lógica.
- Más precisamente, nos interesa ver si el conjunto de fórmulas válidas es exactamente el mismo que el conjunto de teoremas.
- La respuesta se obtienen mediante resultados de *correctitud* y *completitud* que muestran que $\models$ y $\vdash$ coinciden.

Definiciones básicas

- Una *lógica modal* Δ es un conjunto de fórmulas modales que contienen a todas las tautologías proposicionales y está cerrado por:
  I. *modus ponens*: Si $\varphi \in \Delta$ y $\varphi \to \psi \in \Delta$ entonces $\psi \in \Delta$.
  II. *sustitución uniforme*[1]: Si $\varphi \in \Delta$ entonces también pertenece cualquier sustitución, que consiste en reemplazar uniformemente cualquier proposición por una fórmula arbitraria.
- Si $\varphi \in \Delta$ decimos que φ es un *teorema* de Δ, y lo notamos como $\vdash_\Delta \varphi$.
- Si Δ_1 y Δ_2 son lógicas modales tales que $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$ decimos que Δ_2 es una *extensión* de Δ_1

[1] FiXme: OJO!

Algunos ejemplos

I) La colección de *todas las fórmulas* es una lógica. La lógica *inconsistente*.

II) Si $\{\Delta_i \mid i \in I\}$ es una colección de lógicas, entonces $\bigcap_{i \in I} \Delta_i$ es una lógica.

III) Si M es una clase de modelos, entonces el conjunto Δ_M de fórmulas válidas en M no necesariamente es una lógica. Pensar un contraejemplo!

Existe una lógica *mínima* que contiene a cualquier conjunto de fórmulas Γ. La llamamos la lógica *generada* por Γ.

- Por ejemplo, la lógica generada por el conjunto vacío contiene a todas las instancias de tautologías proposicionales y nada más. La llamaremos PC.

Deducibilidad o Consecuencia Sintáctica

- Sean $\psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi$ fórmulas modales. Decimos que φ es *deducible en el cálculo proposicional* asumiendo $\psi_1, \ldots, \psi_n$ si $(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \to \varphi$ es una tautología.

Como todas las lógicas están cerradas bajo deducción en el cálculo proposicional, si φ es deducible en el cálculo proposicional asumiendo $\psi_1, \ldots, \psi_n$, entonces $\vdash_\Delta \psi_1 \cdots \vdash_\Delta \psi_n$ implica $\vdash_\Delta \varphi$.

- Si $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es un conjunto de fórmulas, entonces φ *es deducible* en Δ a partir de Γ (notación $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$) si:
  1. $\vdash_\Delta \varphi$, ó
  2. hay fórmulas $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ tal que $\vdash_\Delta (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \to \varphi$.

Un conjunto de fórmulas Γ es Δ-consistente si $\Gamma \nvdash_\Delta \perp$.
Una fórmula φ es Δ-consistente si $\{\varphi\}$ lo es.

Lógica modal normal

- Las definiciones anteriores son generalizaciones de conceptos del cálculo proposicional a los lenguajes modales.
- Ahora vamos a ver un concepto que es exclusivamente modal: lógicas modales normales.
- Una lógica modal Δ es normal si contiene a la fórmula:

$$\textbf{(K)} \qquad \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q).$$

y está cerrada por la regla de necesitación o generalización:

$$\textbf{(Nec)}\ \text{Si } \vdash_\Delta \varphi \text{ entonces } \vdash_\Delta \Box\varphi.$$

Ejemplos

I) La lógica inconsistente es una lógica normal.

II) Si $\{\Delta_i \mid i \in I\}$ es una colección de lógicas normales, entonces $\bigcap_{i \in I} \Delta_i$ es una lógica normal.

III) PC no es una lógica normal.

Existe una lógica modal normal *mínima* que contiene a cualquier conjunto de fórmulas Γ. La llamamos la lógica modal normal *generada* por Γ.

- La lógica modal normal generada por el conjunto vacío es llamada **K**, y es la mínima lógica modal normal. Si Γ es un conjunto de fórmulas, la lógica modal normal generada por Γ se llama $\mathbf{K}\Gamma$.

También es usual llamar a Γ *axiomas*, y decir que la lógica es generada a partir de Γ usando las *reglas de inferencia* modus ponens, sustitución uniforme y generalización.

Consecuencia semántica

Dada una clase de modelos $\mathbb{C}$ y un conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\varphi\}$ existen diferentes formas de definir la noción de *consecuencia semántica* en $\mathbb{C}$:

- *Consecuencia Local:* $\Gamma \models^{l}_{\mathbb{C}} \varphi$ sii

$$\forall M \in \mathbb{C}\ \forall w\ (M, w \models \Gamma \implies M, w \models \varphi)$$

- *Consecuencia Global:* $\Gamma \models^{g}_{\mathbb{C}} \varphi$ sii

$$\forall M \in \mathbb{C}\ \ (M \models \Gamma \implies M \models \varphi)$$

La noción de consecuencia local es la más fuerte (i.e., $\Gamma \models^{l} \varphi$ implica $\Gamma \models^{g} \varphi$). Ejercicio.
En lo que sigue, $\Gamma \models_{\mathbb{C}} \varphi$ es $\Gamma \models^{l}_{\mathbb{C}} \varphi$. El índice $\mathbb{C}$ a veces se omite si $\mathbb{C}$ es la clase de todos los modelos.

Corrección & Completitud

Repasemos las definiciones:

- Una lógica Δ es *correcta* con respecto a una clase de modelos $\mathbb{C}$ si para toda fórmula φ y todo modelo $M \in \mathbb{C}$, si $\vdash_\Delta \varphi$ entonces $M \models \varphi$.
- Una lógica Δ es *fuertemente completa* con respecto a una clase de modelos $\mathbb{C}$ si para cualquier conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\varphi\}$, si $\Gamma \models_{\mathbb{C}} \varphi$ entonces $\Gamma \vdash_\Delta \varphi$.

Lo que vimos hoy

- Historia de las Lógicas Modales.
- Sintaxis y semántica de mundos posibles para la LMB.
- Enfoque “plural” (muchas lógicas).
- Herramientas básicas para estudiar una lógica modal.
  - Bisimulaciones.
  - Axiomatizaciones.
  - Traducción a LPO.

Lo que viene

- Introduciremos un primer operador dinámico que elimina estados: Lógica de Anuncios Públicos (LAP).
- Estudiaremos las consecuencias de tener este tipo de operadores.
  - Bisimulaciones.
  - Axiomatizaciones.
  - Traducción a LPO.
- Completaremos la demostración de completitud de hoy.