Lógicas Modales Dinámicas

Clase #2

Carlos Areces & Raul Fervari

Febrero 2024, Río Cuarto, Argentina

Hasta ahora

- Historia de las Lógicas Modales.
- Sintaxis y semántica de mundos posibles para la LMB.
- Enfoque "plural" (muchas lógicas).
- Herramientas básicas para estudiar una lógica modal.
  - Bisimulaciones.
  - Axiomatizaciones (pendiente!).
  - Traducción a LPO.

Plan para hoy

- Pero... Dónde están mis Lógicas Dinámicas.

Plan para hoy

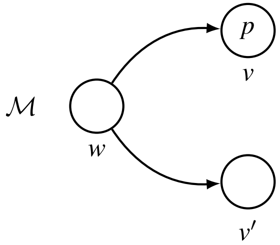
- Pero... Dónde están mis Lógicas Dinámicas.
- Introduciremos un primer operador dinámico que elimina estados.
- Usualmente se la conoce como Lógica de Anuncios Públicos (LAP) (o de *observaciones* públicas).
- Estudiaremos las consecuencias de tener este tipo de operadores.
  - Bisimulaciones.
  - Axiomatizaciones.
  - Traducción a LPO.
- Demostraremos completitud para LMB.

Situaciones posibles

- Supongamos que no sabemos el clima de mañana.

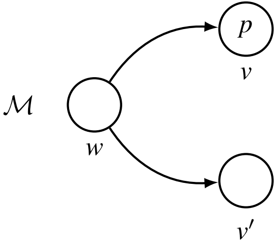
Situaciones posibles

- Supongamos que no sabemos el clima de mañana.
- Sea p = "llueve", tenemos dos situaciones posibles:



Situaciones posibles

- Supongamos que no sabemos el clima de mañana.
- Sea p = "llueve", tenemos dos situaciones posibles:



- Tenemos que $\mathcal{M}, w \models \Diamond p \land \Diamond \neg p$.

Anuncios Públicos

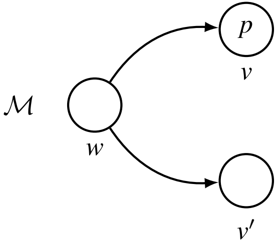
- Supongamos ahora que obtenemos nueva información (por medio de una app del tiempo, o dolor de rodillas del abuelo).

Anuncios Públicos

- Supongamos ahora que obtenemos nueva información (por medio de una app del tiempo, o dolor de rodillas del abuelo).
- La nueva información establece que no va a haber lluvia (p no puede ser verdad).

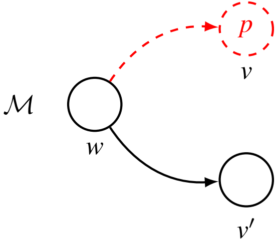
Anuncios Públicos

- Supongamos ahora que obtenemos nueva información (por medio de una app del tiempo, o dolor de rodillas del abuelo).
- La nueva información establece que no va a haber lluvia (p no puede ser verdad).
- Por lo tanto, la situación p deja de ser *posible*:



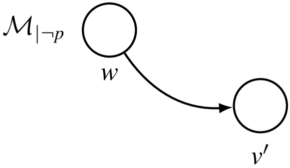
Anunciós Públicos

- Supongamos ahora que obtenemos nueva información (por medio de una app del tiempo, o dolor de rodillas del abuelo).
- La nueva información establece que no va a haber lluvia (p no puede ser verdad).
- Por lo tanto, la situación p deja de ser *posible*:



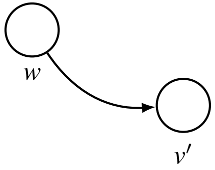
Anuncios Públicos

- Supongamos ahora que obtenemos nueva información (por medio de una app del tiempo, o dolor de rodillas del abuelo).
- La nueva información establece que no va a haber lluvia (p no puede ser verdad).
- Por lo tanto, la situación p deja de ser *posible*:



Anuncios Públicos

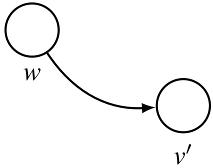
- Supongamos ahora que obtenemos nueva información (por medio de una app del tiempo, o dolor de rodillas del abuelo).
- La nueva información establece que no va a haber lluvia (p no puede ser verdad).
- Por lo tanto, la situación p deja de ser *posible*:



- Tenemos que $\mathcal{M}_{|\neg p}, w \models \Diamond\neg p \wedge \neg\Diamond p$ (notar que $\neg\Diamond p$ es $\Box\neg p$).

Anuncios Públicos

- Supongamos ahora que obtenemos nueva información (por medio de una app del tiempo, o dolor de rodillas del abuelo).
- La nueva información establece que no va a haber lluvia (p no puede ser verdad).
- Por lo tanto, la situación p deja de ser *posible*:



- Tenemos que $\mathcal{M}_{|\neg p}, w \models \Diamond\neg p \wedge \neg\Diamond p$ (notar que $\neg\Diamond p$ es $\Box\neg p$).
- Después de observar o anunciar $\neg p$, necesariamente vale $\neg p$

Una lógica de anuncios públicos (LAP)

Es una extensión de LMB con un operador de anuncios públicos:

$$[!\psi]\varphi$$

Se lee como "luego de que se anuncia ψ, φ es verdadera".

Una lógica de anuncios públicos (LAP)

Es una extensión de LMB con un operador de anuncios públicos:

$$[!\psi]\varphi$$

Se lee como "luego de que se anuncia ψ, φ es verdadera".
Semánticamente se restringe el modelo original:

$$\mathcal{M}, w \models [!\psi]\varphi \ \text{ sii } \ (\mathcal{M}, w \models \psi \text{ implica } \mathcal{M}_{|\psi}, w \models \varphi).$$

Una lógica de anuncios públicos (LAP)

Es una extensión de LMB con un operador de anuncios públicos:

$$[!\psi]\varphi$$

Se lee como "luego de que se anuncia ψ, φ es verdadera".
Semánticamente se restringe el modelo original:

$$\mathcal{M}, w \models [!\psi]\varphi \text{ sii } (\mathcal{M}, w \models \psi \text{ implica } \mathcal{M}_{|\psi}, w \models \varphi).$$

$\mathcal{M}_{|\psi} = \langle W_{|\psi}, R_{|\psi}, V_{|\psi} \rangle$ donde

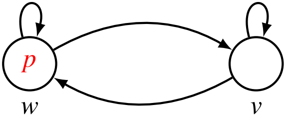
$W_{|\psi} = \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \psi\}$ $\quad V_{|\psi}(p) = V(p) \cap W_{|\psi}$, para $p \in \text{PROP}$;
$(R_{|\psi}) = R \cap (W_{|\psi} \times W_{|\psi})$.

Anuncios Públicos

- Tenemos que $\mathcal{M}, w \models [!p]\Box p$:

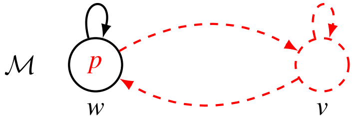
Anuncios Públicos

- Tenemos que $\mathcal{M}, w \models [!p]\Box p$:



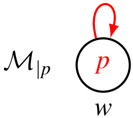
Anuncios Públicos

- Tenemos que $\mathcal{M}, w \models [!p]\Box p$:



Anuncios Públicos

- Tenemos que $\mathcal{M}, w \models [!p]\Box p$:



LAP es una lógica modal

El operador de anuncios públicos es bastante diferente a los otros operadores modales que vimos: en cierto momento, evaluamos parte de una fórmula después de un cambio en el modelo.

LAP es una lógica modal

El operador de anuncios públicos es bastante diferente a los otros operadores modales que vimos: en cierto momento, evaluamos parte de una fórmula después de un cambio en el modelo.

$$\mathcal{M}, w \models [!\psi]\varphi \text{ sii } (\mathcal{M}, w \models \psi \text{ implica } \mathcal{M}_{|\psi}, w \models \varphi).$$

LAP es una lógica modal

El operador de anuncios públicos es bastante diferente a los otros operadores modales que vimos: en cierto momento, evaluamos parte de una fórmula después de un cambio en el modelo.

$$\mathcal{M}, w \models [!\psi]\varphi \ \text{ sii } \ (\mathcal{M}, w \models \psi \text{ implica } \mathcal{M}_{|\psi}, w \models \varphi).$$

Sin embargo, podemos usar todas las herramientas conocidas de la lógica modal al trabajar con LAP.

LAP es una lógica modal

El operador de anuncios públicos es bastante diferente a los otros operadores modales que vimos: en cierto momento, evaluamos parte de una fórmula después de un cambio en el modelo.

$$\mathcal{M}, w \models [!\psi]\varphi \;\text{ sii }\; (\mathcal{M}, w \models \psi \text{ implica } \mathcal{M}_{|\psi}, w \models \varphi).$$

Sin embargo, podemos usar todas las herramientas conocidas de la lógica modal al trabajar con LAP.

Por ejemplo, para investigar completitud y poder expresivo.

Bisimulaciones y Poder Expresivo

Teorema.
$\mathcal{M}, w \leftrightarroweq \mathcal{M}', w'$ implica que para toda formula φ de LAP,

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \text{ sii } \mathcal{M}', w' \models \varphi.$$

Bisimulaciones y Poder Expresivo

Teorema.
$\mathcal{M}, w \leftrightarroweq \mathcal{M}', w'$ implica que para toda formula φ de LAP,

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \text{ sii } \mathcal{M}', w' \models \varphi.$$

Podemos hacer inducción estructural sobre φ: como LAP extiende a LMB, solo nos quedar demostrar el caso $\varphi = [!\chi]\psi$....

Juguemos con algunas fórmulas

1. $[!\psi](\varphi \land \chi) \leftrightarrow ([!\psi]\varphi \land [!\psi]\chi)$
   Esta fórmula es válida?

Juguemos con algunas fórmulas

1. $[!\psi](\varphi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\psi]\varphi \wedge [!\psi]\chi)$
   Esta fórmula es válida?
2. $[!\psi]p \leftrightarrow p$
   Qué pasa con esta fórmula?

Juguemos con algunas fórmulas

1. $[!\psi](\varphi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\psi]\varphi \wedge [!\psi]\chi)$
   Esta fórmula es válida?

2. $[!\psi]p \leftrightarrow p$
   Qué pasa con esta fórmula? Pensemos:

   - $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$ iff $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$.

Juguemos con algunas fórmulas

1. $[!\psi](\varphi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\psi]\varphi \wedge [!\psi]\chi)$

   Esta fórmula es válida?

2. $[!\psi]p \leftrightarrow p$

   Qué pasa con esta fórmula? Pensemos:

   - $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$ iff $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$.
   - Si $\mathcal{M}, w \not\models \psi$ y $\mathcal{M}_{|\psi}, w \not\models p$, eso se cumple.

Juguemos con algunas fórmulas

1. $[!\psi](\varphi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\psi]\varphi \wedge [!\psi]\chi)$

   Esta fórmula es válida?

2. $[!\psi]p \leftrightarrow p$

   Qué pasa con esta fórmula? Pensemos:

   - $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$ iff $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$.
   - Si $\mathcal{M}, w \not\models \psi$ y $\mathcal{M}_{|\psi}, w \not\models p$, eso se cumple.
   - O sea, tenemos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$ y $\mathcal{M}, w \not\models p$.

Juguemos con algunas fórmulas

1. $[!\psi](\varphi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\psi]\varphi \wedge [!\psi]\chi)$

   Esta fórmula es válida?

2. $[!\psi]p \leftrightarrow p$

   Qué pasa con esta fórmula? Pensemos:

   - $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$ iff $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$.
   - Si $\mathcal{M}, w \not\models \psi$ y $\mathcal{M}_{|\psi}, w \not\models p$, eso se cumple.
   - O sea, tenemos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$ y $\mathcal{M}, w \not\models p$.

   Podemos reforzar la fórmula:

3. $[!\psi]p \leftrightarrow (\psi \rightarrow p)$

Juguemos con algunas fórmulas

1. $[!\psi](\varphi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\psi]\varphi \wedge [!\psi]\chi)$

   Esta fórmula es válida?

2. $[!\psi]p \leftrightarrow p$

   Qué pasa con esta fórmula? Pensemos:

   - $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$ iff $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$.
   - Si $\mathcal{M}, w \not\models \psi$ y $\mathcal{M}_{|\psi}, w \not\models p$, eso se cumple.
   - O sea, tenemos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$ y $\mathcal{M}, w \not\models p$.

   Podemos reforzar la fórmula:

3. $[!\psi]p \leftrightarrow (\psi \rightarrow p)$

4. $[!\psi]\neg\varphi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \neg[!\psi]\varphi)$

Juguemos con algunas fórmulas

1. $[!\psi](\varphi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\psi]\varphi \wedge [!\psi]\chi)$

   Esta fórmula es válida?

2. $[!\psi]p \leftrightarrow p$

   Qué pasa con esta fórmula? Pensemos:

   - $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$ iff $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$.
   - Si $\mathcal{M}, w \not\models \psi$ y $\mathcal{M}_{|\psi}, w \not\models p$, eso se cumple.
   - O sea, tenemos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$ y $\mathcal{M}, w \not\models p$.

   Podemos reforzar la fórmula:

3. $[!\psi]p \leftrightarrow (\psi \rightarrow p)$

4. $[!\psi]\neg\varphi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \neg[!\psi]\varphi)$

5. ... Podemos seguir?

Y esto, qué significa?

- ‘Demostramos’ que las tal bisimulaciones como las conocemos preserva verdad de fórmulas entre modelos (spoiler alert: esto no va a pasar con todas las lógicas).
- Parece ser que nos podemos sacar de encima al operador $[!\psi]$.
- La pregunta es cuáles son las implicancias de esto.

Y esto, qué significa?

- 'Demostramos' que las tal bisimulaciones como las conocemos preserva verdad de fórmulas entre modelos (spoiler alert: esto no va a pasar con todas las lógicas).
- Parece ser que nos podemos sacar de encima al operador $[!\psi]$.
- La pregunta es cuáles son las implicancias de esto.
- Vamos a ver ahora una técnica basada en lo que vimos hasta ahora, que nos va a servir tanto como para ver la expresividad de LAP, pero también para axiomatizar.

Axiomas de reducción para LAP

Mediante axiomas de reducción podemos traducir fórmulas con anuncios públicos en el lenguaje modal básico:

1. $[!\psi]p \leftrightarrow (\psi \to p)$
2. $[!\psi]\neg\varphi \leftrightarrow (\psi \to \neg[!\psi]\varphi)$
3. $[!\psi](\varphi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\psi]\varphi \wedge [!\psi]\chi)$
4. $[!\psi]\Diamond\varphi \leftrightarrow (\psi \to \Diamond[!\psi]\varphi)$
5. $[!\psi][!\chi]\varphi \leftrightarrow [!\psi \wedge [!\psi]\chi]\varphi$

Los axiomas de reducción son válidos (demo) I

1. Supongamos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$. entonces, por def. de $[!\psi]$ tenemos que $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$. Pero $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$ sii $\mathcal{M}, w \models p$; luego, $\mathcal{M}, w \models \psi \to p$.

4. Supongamos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]\Diamond\varphi$.

Los axiomas de reducción son válidos (demo) I

1. Supongamos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$. entonces, por def. de $[!\psi]$ tenemos que $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$. Pero $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$ sii $\mathcal{M}, w \models p$; luego, $\mathcal{M}, w \models \psi \rightarrow p$.

4. Supongamos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]\Diamond\varphi$.
Por def. de $[!\psi]$, tenemos que $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models \Diamond\varphi$.

Los axiomas de reducción son válidos (demo) I

1. Supongamos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$. entonces, por def. de $[!\psi]$ tenemos que $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$. Pero $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$ sii $\mathcal{M}, w \models p$; luego, $\mathcal{M}, w \models \psi \rightarrow p$.

4. Supongamos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]\Diamond\varphi$.
Por def. de $[!\psi]$, tenemos que $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models \Diamond\varphi$.
Por def. de $\Diamond$, $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica que existe $v \in W_{|\psi}$ t.q. $(w, v) \in (R_{|\psi})$ y $\mathcal{M}_{|\psi}, v \models \varphi$.

Los axiomas de reducción son válidos (demo) I

1. Supongamos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$. entonces, por def. de $[!\psi]$ tenemos que $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$. Pero $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$ sii $\mathcal{M}, w \models p$; luego, $\mathcal{M}, w \models \psi \rightarrow p$.

4. Supongamos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]\Diamond\varphi$.
Por def. de $[!\psi]$, tenemos que $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models \Diamond\varphi$.
Por def. de $\Diamond$, $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica que existe $v \in W_{|\psi}$ t.q. $(w, v) \in (R_{|\psi})$ y $\mathcal{M}_{|\psi}, v \models \varphi$.
Por def. de $[!\psi]$, $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica que existe $v \in W_{|\psi}$ t.q. $(w, v) \in (R_{|\psi})$ y $\mathcal{M}, v \models [!\psi]\varphi$, y por $\Diamond$, tenemos $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}, w \models \Diamond[!\psi]\varphi$.

Los axiomas de reducción son válidos (demo) I

1. Supongamos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]p$. entonces, por def. de $[!\psi]$ tenemos que $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$. Pero $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models p$ sii $\mathcal{M}, w \models p$; luego, $\mathcal{M}, w \models \psi \to p$.

4. Supongamos $\mathcal{M}, w \models [!\psi]\Diamond\varphi$.
Por def. de $[!\psi]$, tenemos que $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models \Diamond\varphi$.
Por def. de $\Diamond$, $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica que existe $v \in W_{|\psi}$ t.q. $(w, v) \in (R_{|\psi})$ y $\mathcal{M}_{|\psi}, v \models \varphi$.
Por def. de $[!\psi]$, $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica que existe $v \in W_{|\psi}$ t.q. $(w, v) \in (R_{|\psi})$ y $\mathcal{M}, v \models [!\psi]\varphi$, y por $\Diamond$, tenemos $\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}, w \models \Diamond[!\psi]\varphi$.
Por lo tanto, $\mathcal{M}, w \models \psi \to \Diamond[!\psi]\varphi$.

Los axiomas de reducción son válidos (demo) II

5. Supongamos $\mathcal{M}, w \models [!\psi][!\chi]\varphi$ $\quad\{\Leftrightarrow$ por $\models\}$
$\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models [!\chi]\varphi$ $\quad\{\Leftrightarrow$ por $\models\}$
$\mathcal{M}, w \models \psi$ implica $(\mathcal{M}_{|\psi}, w \models \chi$ implica $(\mathcal{M}_{|\psi})_{|\chi}, w \models \varphi)$
$\{\Leftrightarrow$ por currificación proposicional$\}$
$\mathcal{M}, w \models \psi$ y $\mathcal{M}_{|\psi}, w \models \chi$ implica $(\mathcal{M}_{|\psi})_{|\chi}, w \models \varphi$ $\quad\{\Leftrightarrow$ por $\models\}$
$\mathcal{M}, w \models \psi$ y $\mathcal{M}, w \models [!\psi]\chi$ implica $(\mathcal{M}_{|\psi})_{|\chi}, w \models \varphi$ $\quad\{\Leftrightarrow$ by $\models\}$
$\mathcal{M}, w \models \psi \wedge [!\psi]\chi$ implica $(\mathcal{M}_{|\psi})_{|\chi}, w \models \varphi$.
Miremos el modelo $(\mathcal{M}_{|\psi})_{|\chi}$.

$$\begin{aligned}(W_{|\psi})_{|\chi} &= \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \psi \text{ y } \mathcal{M}_{|\psi}, w \models \chi\} \\ &= \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \psi \text{ y } \mathcal{M}, w \models [!\psi]\chi\} \\ &= \{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models \psi \wedge [!\psi]\chi\}\end{aligned}$$

Entonces $(\mathcal{M}_{|\psi})_{|\chi}$ es el mismo modelo que $\mathcal{M}_{|\psi \wedge [!\psi]\chi}$. Luego, $\mathcal{M}, w \models \psi \wedge [!\psi]\chi$ implica $\mathcal{M}_{|\psi \wedge [!\psi]\chi}, w \models \varphi$, es decir, $\mathcal{M}, w \models [!\psi \wedge [!\psi]\chi]\varphi$.

Comparando poder expresivo

Decimos que un lenguaje $\mathcal{L}'$ is tiene igual o mayor poder expresivo que $\mathcal{L}$ (notación $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$) si para cada fórmula φ de $\mathcal{L}$ existe φ' en $\mathcal{L}'$ tal que

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \text{ sii } \mathcal{M}, w \models \varphi'.$$

Comparando poder expresivo

Decimos que un lenguaje $\mathcal{L}'$ is tiene igual o mayor poder expresivo que $\mathcal{L}$ (notación $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$) si para cada fórmula φ de $\mathcal{L}$ existe φ' en $\mathcal{L}'$ tal que

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \ \text{ sii } \ \mathcal{M}, w \models \varphi'.$$

Usualmente, lo demostramos encontrando una traducción $\mathsf{Tr} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ tal que $\mathsf{Tr}(\varphi) = \varphi'$.

Comparando poder expresivo

Decimos que un lenguaje $\mathcal{L}'$ is tiene igual o mayor poder expresivo que $\mathcal{L}$ (notación $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$) si para cada fórmula φ de $\mathcal{L}$ existe φ' en $\mathcal{L}'$ tal que

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \text{ sii } \mathcal{M}, w \models \varphi'.$$

Usualmente, lo demostramos encontrando una traducción $\mathsf{Tr} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ tal que $\mathsf{Tr}(\varphi) = \varphi'$.
$\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ (tienen el mismo poder expresivo) sii $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$ y $\mathcal{L}' \leq \mathcal{L}$.

Traducción de LAP a LMB

Teorema.
LAP y LMB tienen el mismo poder expresivo.

Traducción de LAP a LMB

Teorema.

LAP y LMB tienen el mismo poder expresivo.

Demostración.

Mediante la aplicación sucesiva de los axiomas de reducción, para cada fórmula en LAP obtenemos una fórmula en LMB sin anuncios. Como ya demostramos que estas equivalencias son correctas, obtuvimos una fórmula en LMB que es equivalente a la original en LAP.

Y... ¿qué ganamos?

Y... ¿qué ganamos?

La respuesta en términos de expresividad es un poco sorprendente: LAP no agrega poder expresivo.

Mediante axiomas de reducción podemos traducir fórmulas con anuncios públicos en el lenguaje modal básico:

1. $[!\psi]p \leftrightarrow (\psi \rightarrow p)$
2. $[!\psi]\neg\varphi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \neg[!\psi]\varphi)$
3. $[!\psi](\varphi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\psi]\varphi \wedge [!\psi]\chi)$
4. $[!\psi]\Diamond\varphi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \Diamond[!\psi]\varphi)$
5. $[!\psi][!\chi]\varphi \leftrightarrow [!\psi \wedge [!\psi]\chi]\varphi$

Y... ¿qué ganamos?

La respuesta en términos de expresividad es un poco sorprendente:
LAP no agrega poder expresivo.

Mediante axiomas de reducción podemos traducir fórmulas con anuncios públicos en el lenguaje modal básico:

1. $[!\psi]p \leftrightarrow (\psi \rightarrow p)$
2. $[!\psi]\neg\varphi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \neg[!\psi]\varphi)$
3. $[!\psi](\varphi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\psi]\varphi \wedge [!\psi]\chi)$
4. $[!\psi]\Diamond\varphi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \Diamond[!\psi]\varphi)$
5. $[!\psi][!\chi]\varphi \leftrightarrow [!\psi \wedge [!\psi]\chi]\varphi$

Pero la fórmula puede ser exponencialmente más larga!

Fenómeno de Moore

- $\mathcal{M}_{|\psi}$ contiene solamente estados en $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$.

Fenómeno de Moore

- $\mathcal{M}_{|\psi}$ contiene solamente estados en $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$.
- Entonces, $\models [!\psi]\Box\psi$, para toda ψ?

Fenómeno de Moore

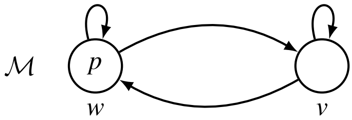
- $\mathcal{M}_{|\psi}$ contiene solamente estados en $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$.
- Entonces, $\models [!\psi]\Box\psi$, para toda ψ?
- Cómo lo demostramos? Por inducción (estructural) en ψ.

Fenómeno de Moore

- $\mathcal{M}_{|\psi}$ contiene solamente estados en $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$.
- Entonces, $\models [!\psi]\Box\psi$, para toda ψ?
- Cómo lo demostramos? Por inducción (estructural) en ψ.
- Una pregunta más general: $\models [!\varphi]\varphi$?

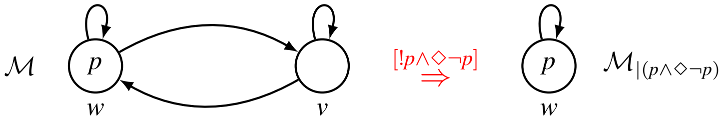
Fenómeno de Moore

- $\mathcal{M}_{|\psi}$ contiene solamente estados en $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$.
- Entonces, $\models [!\psi]\Box\psi$, para toda ψ?
- Cómo lo demostramos? Por inducción (estructural) en ψ.
- Una pregunta más general: $\models [!\varphi]\varphi$?
- Anunciemos $p \land \Diamond\neg p$ en $\mathcal{M}$:



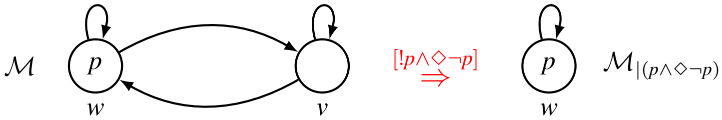
Fenómeno de Moore

- $\mathcal{M}_{|\psi}$ contiene solamente estados en $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$.
- Entonces, $\models [!\psi]\Box\psi$, para toda ψ?
- Cómo lo demostramos? Por inducción (estructural) en ψ.
- Una pregunta más general: $\models [!\varphi]\varphi$?
- Anunciemos $p \wedge \Diamond\neg p$ en $\mathcal{M}$:



Fenómeno de Moore

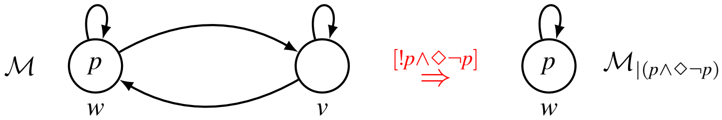
- $\mathcal{M}_{|\psi}$ contiene solamente estados en $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$.
- Entonces, $\models [!\psi]\Box\psi$, para toda ψ?
- Cómo lo demostramos? Por inducción (estructural) en ψ.
- Una pregunta más general: $\models [!\varphi]\varphi$?
- Anunciemos $p \wedge \Diamond\neg p$ en $\mathcal{M}$:



- Tenemos que $\mathcal{M}, w \models p \wedge \Diamond\neg p$ pero $\mathcal{M}, w \not\models [!p \wedge \Diamond\neg p]p \wedge \Diamond\neg p$.

Fenómeno de Moore

- $\mathcal{M}_{|\psi}$ contiene solamente estados en $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$.
- Entonces, $\models [!\psi]\Box\psi$, para toda ψ?
- Cómo lo demostramos? Por inducción (estructural) en ψ.
- Una pregunta más general: $\models [!\varphi]\varphi$?
- Anunciemos $p \wedge \Diamond\neg p$ en $\mathcal{M}$:



- Tenemos que $\mathcal{M}, w \models p \wedge \Diamond\neg p$ pero $\mathcal{M}, w \not\models [!p \wedge \Diamond\neg p]p \wedge \Diamond\neg p$.
- Fenómeno de Moore: luego de anunciar un hecho, se vuelve falso.

Sustitución uniforme

- Si ψ es proposicional, $[!\psi]\psi$ es válida (por qué?).

Sustitución uniforme

- Si ψ es proposicional, $[!\psi]\psi$ es válida (por qué?).
- Por lo tanto, $[!p]p$ es válida, pero $[!\varphi]\varphi$ no es válida, para φ arbitraria.

Sustitución uniforme

- Si ψ es proposicional, $[!\psi]\psi$ es válida (por qué?).
- Por lo tanto, $[!p]p$ es válida, pero $[!\varphi]\varphi$ no es válida, para φ arbitraria.
- Es decir, no podemos reemplazar un símbolo proposicional por fórmulas arbitrarias y preservar validez.

Sustitución uniforme

- Si ψ es proposicional, $[!\psi]\psi$ es válida (por qué?).
- Por lo tanto, $[!p]p$ es válida, pero $[!\varphi]\varphi$ no es válida, para φ arbitraria.
- Es decir, no podemos reemplazar un símbolo proposicional por fórmulas arbitrarias y preservar validez.
- Luego, la sustitución uniforme falla.

Introducción a Completitud

- Una lógica se puede especificar semántica o sintácticamente.

Introducción a Completitud

- Una lógica se puede especificar semántica o sintácticamente.
- El enfoque semántico se corresponde con la noción de satisfacibilidad de una fórmula (o validez $\models \varphi$).

Introducción a Completitud

- Una lógica se puede especificar semántica o sintácticamente.
- El enfoque semántico se corresponde con la noción de satisfacibilidad de una fórmula (o validez $\models \varphi$).
- El enfoque sintáctico se corresponde con la noción de teorema $\vdash \varphi$ (usualmente definidos en términos de un sistema axiomático).

Introducción a Completitud

- Una lógica se puede especificar semántica o sintácticamente.
- El enfoque semántico se corresponde con la noción de satisfacibilidad de una fórmula (o validez $\models \varphi$).
- El enfoque sintáctico se corresponde con la noción de teorema $\vdash \varphi$ (usualmente definidos en términos de un sistema axiomático).
- Surge la pregunta de cuándo estas dos alternativas definen la misma lógica.

Introducción a Completitud

- Una lógica se puede especificar semántica o sintácticamente.
- El enfoque semántico se corresponde con la noción de satisfacibilidad de una fórmula (o validez $\models \varphi$).
- El enfoque sintáctico se corresponde con la noción de teorema $\vdash \varphi$ (usualmente definidos en términos de un sistema axiomático).
- Surge la pregunta de cuándo estas dos alternativas definen la misma lógica.
- Más precisamente, nos interesa ver si el conjunto de fórmulas válidas es exactamente el mismo que el conjunto de teoremas.

Introducción a Completitud

- Una lógica se puede especificar semántica o sintácticamente.
- El enfoque semántico se corresponde con la noción de satisfacibilidad de una fórmula (o validez $\models \varphi$).
- El enfoque sintáctico se corresponde con la noción de teorema $\vdash \varphi$ (usualmente definidos en términos de un sistema axiomático).
- Surge la pregunta de cuándo estas dos alternativas definen la misma lógica.
- Más precisamente, nos interesa ver si el conjunto de fórmulas válidas es exactamente el mismo que el conjunto de teoremas.
- La respuesta se obtienen mediante resultados de *correctitud* y *completitud* que muestran que $\models$ y $\vdash$ coinciden.

Sistema axiomático **K**

- El sistema axiomático **K** es el conjunto de fórmulas modales Δ que contienen a todas las tautologías proposicionales y está cerrado por:
  I. *modus ponens*: Si $\varphi \in \Delta$ y $\varphi \to \psi \in \Delta$ entonces $\psi \in \Delta$.
  II. *sustitución uniforme*: Si $\varphi \in \Delta$ entonces también pertenece cualquier sustitución, que consiste en reemplazar uniformemente cualquier proposición por una fórmula arbitraria.

Sistema axiomático **K**

- El sistema axiomático **K** es el conjunto de fórmulas modales Δ que contienen a todas las tautologías proposicionales y está cerrado por:
    I. *modus ponens*: Si $\varphi \in \Delta$ y $\varphi \to \psi \in \Delta$ entonces $\psi \in \Delta$.
    II. *sustitución uniforme*: Si $\varphi \in \Delta$ entonces también pertenece cualquier sustitución, que consiste en reemplazar uniformemente cualquier proposición por una fórmula arbitraria.
    III. Contiene a la fórmula:

$$\textbf{(K)} \qquad \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q).$$

Sistema axiomático **K**

- El sistema axiomático **K** es el conjunto de fórmulas modales Δ que contienen a todas las tautologías proposicionales y está cerrado por:
  I. *modus ponens*: Si $\varphi \in \Delta$ y $\varphi \to \psi \in \Delta$ entonces $\psi \in \Delta$.
  II. *sustitución uniforme*: Si $\varphi \in \Delta$ entonces también pertenece cualquier sustitución, que consiste en reemplazar uniformemente cualquier proposición por una fórmula arbitraria.
  III. Contiene a la fórmula:

$$\textbf{(K)} \quad \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q).$$

  IV. y está cerrada por la regla de necesitación o generalización:

$$\textbf{(Nec)}\ \text{Si } \vdash_{\mathbf{K}} \varphi \text{ entonces } \vdash_{\mathbf{K}} \Box\varphi.$$

Sistema axiomático **K**

- El sistema axiomático **K** es el conjunto de fórmulas modales Δ que contienen a todas las tautologías proposicionales y está cerrado por:
  I. *modus ponens*: Si $\varphi \in \Delta$ y $\varphi \to \psi \in \Delta$ entonces $\psi \in \Delta$.
  II. *sustitución uniforme*: Si $\varphi \in \Delta$ entonces también pertenece cualquier sustitución, que consiste en reemplazar uniformemente cualquier proposición por una fórmula arbitraria.
  III. Contiene a la fórmula:

  $$\textbf{(K)} \quad \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q).$$

  IV. y está cerrada por la regla de necesitación o generalización:

  $$\textbf{(Nec)} \text{ Si } \vdash_{\mathbf{K}} \varphi \text{ entonces } \vdash_{\mathbf{K}} \Box\varphi.$$

- Si $\varphi \in \Delta$ decimos que φ es un *teorema* de **K** ($\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$).

Deducibilidad o Consecuencia Sintáctica

- Sean $\psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi$ fórmulas modales. Decimos que φ es *deducible en el cálculo proposicional* asumiendo $\psi_1, \ldots, \psi_n$ si $(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \to \varphi$ es una tautología.

Deducibilidad o Consecuencia Sintáctica

- Sean $\psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi$ fórmulas modales. Decimos que φ es *deducible en el cálculo proposicional* asumiendo $\psi_1, \ldots, \psi_n$ si $(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \to \varphi$ es una tautología.

Como todas las lógicas están cerradas bajo deducción en el cálculo proposicional, si φ es deducible en el cálculo proposicional asumiendo $\psi_1, \ldots, \psi_n$, entonces $\vdash_{\mathbf{K}} \psi_1 \cdots \vdash_{\mathbf{K}} \psi_n$ implica $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$.

Deducibilidad o Consecuencia Sintáctica

- Sean $\psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi$ fórmulas modales. Decimos que φ es *deducible en el cálculo proposicional* asumiendo $\psi_1, \ldots, \psi_n$ si $(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi$ es una tautología.

Como todas las lógicas están cerradas bajo deducción en el cálculo proposicional, si φ es deducible en el cálculo proposicional asumiendo $\psi_1, \ldots, \psi_n$, entonces $\vdash_{\mathbf{K}} \psi_1 \cdots \vdash_{\mathbf{K}} \psi_n$ implica $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$.

- Si $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es un conjunto de fórmulas, entonces φ *es deducible* en **K** a partir de Γ (notación $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \varphi$) si:
  1. $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$, ó
  2. hay fórmulas $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ tal que $\vdash_{\mathbf{K}} (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi$.

Deducibilidad o Consecuencia Sintáctica

- Sean $\psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi$ fórmulas modales. Decimos que φ es *deducible en el cálculo proposicional* asumiendo $\psi_1, \ldots, \psi_n$ si $(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \to \varphi$ es una tautología.

Como todas las lógicas están cerradas bajo deducción en el cálculo proposicional, si φ es deducible en el cálculo proposicional asumiendo $\psi_1, \ldots, \psi_n$, entonces $\vdash_{\mathbf{K}} \psi_1 \cdots \vdash_{\mathbf{K}} \psi_n$ implica $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$.

- Si $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es un conjunto de fórmulas, entonces φ *es deducible* en **K** a partir de Γ (notación $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \varphi$) si:
  1. $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$, ó
  2. hay fórmulas $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ tal que $\vdash_{\mathbf{K}} (\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \to \varphi$.

Un conjunto de fórmulas Γ es **K**-consistente si $\Gamma \nvdash_{\mathbf{K}} \bot$.
Una fórmula φ es **K**-consistente si $\{\varphi\}$ lo es.

Consecuencia semántica

Dada una clase de modelos $\mathbb{C}$ y un conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\varphi\}$, definimos:

- *Consecuencia semántica:* $\Gamma \models_{\mathbb{C}} \varphi$ sii

$$\forall \boldsymbol{M} \in \mathbb{C}\ \forall w\ (\boldsymbol{M}, w \models \Gamma \implies \boldsymbol{M}, w \models \varphi)$$

Corrección & Completitud

Repasemos las definiciones:

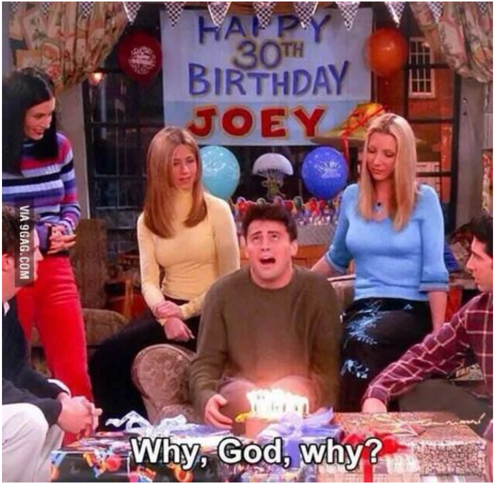
- El sistema **K** es *correcto* con respecto a una clase de modelos $\mathbb{C}$ si para toda fórmula φ y todo modelo $M \in \mathbb{C}$, si $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$ entonces $M \models \varphi$.

Corrección & Completitud

Repasemos las definiciones:

- El sistema **K** es *correcto* con respecto a una clase de modelos $\mathbb{C}$ si para toda fórmula φ y todo modelo $M \in \mathbb{C}$, si $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$ entonces $M \models \varphi$.
- El sistema **K** es *completo* con respecto a una clase de modelos $\mathbb{C}$ si para cualquier conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\varphi\}$, si $\Gamma \models_{\mathbb{C}} \varphi$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \varphi$.

Es hora de arremangarnos y demostrar completitud...



Correctitud y Completitud

La noción de completitud se puede reformular en término de *consistencia*.

Correctitud y Completitud

La noción de completitud se puede reformular en término de *consistencia*.

- Si $\Gamma \models_{\mathbb{C}} \varphi$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \varphi$

Correctitud y Completitud

La noción de completitud se puede reformular en término de *consistencia*.

- Si $\Gamma \models_{\mathbb{C}} \varphi$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_{\mathbf{K}} \varphi$ entonces $\Gamma \not\models_{\mathbb{C}} \varphi$

Correctitud y Completitud

La noción de completitud se puede reformular en término de *consistencia*.

- Si $\Gamma \models_{\mathbb{C}} \varphi$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_{\mathbf{K}} \varphi$ entonces $\Gamma \not\models_{\mathbb{C}} \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_{\mathbf{K}} \neg\varphi \rightarrow \bot$ entonces $\Gamma \not\models_{\mathbb{C}} \varphi$

Correctitud y Completitud

La noción de completitud se puede reformular en término de *consistencia*.

- Si $\Gamma \models_{\mathbb{C}} \varphi$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_{\mathbf{K}} \varphi$ entonces $\Gamma \not\models_{\mathbb{C}} \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_{\mathbf{K}} \neg\varphi \rightarrow \perp$ entonces $\Gamma \not\models_{\mathbb{C}} \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash_{\mathbf{K}} \perp$ entonces $\Gamma \not\models_{\mathbb{C}} \varphi$

Correctitud y Completitud

La noción de completitud se puede reformular en término de *consistencia*.

- Si $\Gamma \models_{\mathbb{C}} \varphi$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_{\mathbf{K}} \varphi$ entonces $\Gamma \not\models_{\mathbb{C}} \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_{\mathbf{K}} \neg\varphi \to \bot$ entonces $\Gamma \not\models_{\mathbb{C}} \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash_{\mathbf{K}} \bot$ entonces $\Gamma \not\models_{\mathbb{C}} \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es **K**-consistente entonces $\Gamma \not\models_{\mathbb{C}} \varphi$

Correctitud y Completitud

La noción de completitud se puede reformular en término de *consistencia*.

- Si $\Gamma \models_{\mathbb{C}} \varphi$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_{\mathbf{K}} \varphi$ entonces $\Gamma \not\models_{\mathbb{C}} \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_{\mathbf{K}} \neg\varphi \to \bot$ entonces $\Gamma \not\models_{\mathbb{C}} \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash_{\mathbf{K}} \bot$ entonces $\Gamma \not\models_{\mathbb{C}} \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es **K**-consistente entonces $\Gamma \not\models_{\mathbb{C}} \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es **K**-consistente entonces $\exists \mathcal{M} \in \mathbb{C}$ t.q. $\mathcal{M}, w \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$

Correctitud y Completitud

La noción de completitud se puede reformular en término de *consistencia*.

- Si $\Gamma \models_{\mathbb{C}} \varphi$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_{\mathbf{K}} \varphi$ entonces $\Gamma \not\models_{\mathbb{C}} \varphi$
- Si $\Gamma \nvdash_{\mathbf{K}} \neg\varphi \to \bot$ entonces $\Gamma \not\models_{\mathbb{C}} \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash_{\mathbf{K}} \bot$ entonces $\Gamma \not\models_{\mathbb{C}} \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es **K**-consistente entonces $\Gamma \not\models_{\mathbb{C}} \varphi$
- Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es **K**-consistente entonces $\exists \mathcal{M} \in \mathbb{C}$ t.q. $\mathcal{M}, w \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$

Es decir:

- El sistema **K** es *fuertemente completo* para LMB con respecto a una clase $\mathbb{C}$ sii cada conjunto **K**-consistente de fórmulas de LMB es satisfacible en algún modelo $\mathcal{M} \in \mathbb{C}$.

Modelo canónico

- Demostrar correctitud con respecto a una clase $\mathbb{C}$ suele fácil.
  - Hay que ver que los axiomas son universalmente válidos en $\mathbb{C}$.
  - Hay que ver que las reglas de inferencia preservan verdad en $\mathbb{C}$.

Modelo canónico

- Demostrar correctitud con respecto a una clase $\mathbb{C}$ suele fácil.
  - Hay que ver que los axiomas son universalmente válidos en $\mathbb{C}$.
  - Hay que ver que las reglas de inferencia preservan verdad en $\mathbb{C}$.
- Nos vamos a concentrar en demostrar completitud, y para eso tenemos que ver cómo hacer para encontrar un modelo que satisfaga a cada conjunto consistente de fórmulas.

Modelo canónico

- Demostrar correctitud con respecto a una clase $\mathbb{C}$ suele fácil.
  - Hay que ver que los axiomas son universalmente válidos en $\mathbb{C}$.
  - Hay que ver que las reglas de inferencia preservan verdad en $\mathbb{C}$.
- Nos vamos a concentrar en demostrar completitud, y para eso tenemos que ver cómo hacer para encontrar un modelo que satisfaga a cada conjunto consistente de fórmulas.
- Y las "piezas" que vamos a usar van a ser *conjuntos maximales consistentes*.

Modelo canónico

- Demostrar correctitud con respecto a una clase $\mathbb{C}$ suele fácil.
  - Hay que ver que los axiomas son universalmente válidos en $\mathbb{C}$.
  - Hay que ver que las reglas de inferencia preservan verdad en $\mathbb{C}$.
- Nos vamos a concentrar en demostrar completitud, y para eso tenemos que ver cómo hacer para encontrar un modelo que satisfaga a cada conjunto consistente de fórmulas.
- Y las "piezas" que vamos a usar van a ser *conjuntos maximales consistentes*.

Un conjunto de fórmulas Γ es maximal **K**-consistente si:

1. Γ es **K**-consistente, y
2. cualquier conjunto de fórmulas que contiene propiamente a Γ es **K**-inconsistente.

- Si Γ es un conjunto maximal **K**-consistente decimos que es un **K**-MCS.

Modelo canónico

La idea es trabajar con colecciones de MCSs coherentemente relacionados para construir el modelo buscado.
El objetivo es probar el *truth lemma*, que nos dice que:

'φ pertenece a un MCS' $\equiv$ 'φ es verdadera en un modelo'.

- Los mundos del modelo canónico van a ser todos los MCSs de la lógica en la que estemos trabajando.

Modelo canónico

La idea es trabajar con colecciones de MCSs coherentemente relacionados para construir el modelo buscado.
El objetivo es probar el *truth lemma*, que nos dice que:

‘φ pertenece a un MCS’ $\equiv$ ‘φ es verdadera en un modelo’.

- Los mundos del modelo canónico van a ser todos los MCSs de la lógica en la que estemos trabajando.
- Vamos a ver qué significa que la información de los MCSs esté ‘coherentemente relacionada’, y vamos a usar esa noción para definir la relación de accesibilidad.

Propiedades de MCSs

Para llevar a cabo eso, veamos algunas propiedades que tienen los MCSs. Si Γ es un **K**-MCS, y Δ es el conjunto de fórmulas cerradas por el sistema **K**, entonces:

- $\Delta \subseteq \Gamma$.

Propiedades de MCSs

Para llevar a cabo eso, veamos algunas propiedades que tienen los MCSs. Si Γ es un **K**-MCS, y Δ es el conjunto de fórmulas cerradas por el sistema **K**, entonces:

- $\Delta \subseteq \Gamma$.
- Γ está cerrado bajo modus ponens.

Propiedades de MCSs

Para llevar a cabo eso, veamos algunas propiedades que tienen los MCSs. Si Γ es un **K**-MCS, y Δ es el conjunto de fórmulas cerradas por el sistema **K**, entonces:

- $\Delta \subseteq \Gamma$.
- Γ está cerrado bajo modus ponens.
- Para toda fórmula φ, $\varphi \in \Gamma$ ó $\neg\varphi \in \Gamma$.

Propiedades de MCSs

Para llevar a cabo eso, veamos algunas propiedades que tienen los MCSs. Si Γ es un **K**-MCS, y Δ es el conjunto de fórmulas cerradas por el sistema **K**, entonces:

- $\Delta \subseteq \Gamma$.
- Γ está cerrado bajo modus ponens.
- Para toda fórmula φ, $\varphi \in \Gamma$ ó $\neg\varphi \in \Gamma$.
- Para toda fórmula φ, ψ, $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ sii $\varphi \in \Gamma$ ó $\psi \in \Gamma$.

Lema de Lindenbaum

Como los MCSs van a ser las piezas que necesitamos para construir el modelo canónico, tenemos que asegurarnos de tener suficientes.

Cualquier conjunto consistente de fórmulas puede ser extendido a uno maximal consistente.

Lema de Lindenbaum

Como los MCSs van a ser las piezas que necesitamos para construir el modelo canónico, tenemos que asegurarnos de tener suficientes.
Cualquier conjunto consistente de fórmulas puede ser extendido a uno maximal consistente.

- Si Σ es un conjunto **K**-consistente de fórmulas, entonces existe un **K**-MCS Σ^+ tal que $\Sigma \subseteq \Sigma^+$.

Lema de Lindenbaum

Como los MCSs van a ser las piezas que necesitamos para construir el modelo canónico, tenemos que asegurarnos de tener suficientes. Cualquier conjunto consistente de fórmulas puede ser extendido a uno maximal consistente.

- Si Σ es un conjunto **K**-consistente de fórmulas, entonces existe un **K**-MCS Σ^+ tal que $\Sigma \subseteq \Sigma^+$.

Demostración:

I) Enumeramos las fórmulas de nuestro lenguaje $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$.

Lema de Lindenbaum

Como los MCSs van a ser las piezas que necesitamos para construir el modelo canónico, tenemos que asegurarnos de tener suficientes. Cualquier conjunto consistente de fórmulas puede ser extendido a uno maximal consistente.

- Si Σ es un conjunto **K**-consistente de fórmulas, entonces existe un **K**-MCS Σ^+ tal que $\Sigma \subseteq \Sigma^+$.

Demostración:

I) Enumeramos las fórmulas de nuestro lenguaje $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$.

II) Definimos la secuencia de conjuntos:

$$\begin{array}{lcl} \Sigma_0 & = & \Sigma \\ \Sigma_{n+1} & = & \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{si el conjunto es } \mathbf{K}\text{-consistente} \\ \Sigma_n & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \Sigma^+ & = & \bigcup_{n\geq 0} \Sigma_n \end{array}$$

Construcción del modelo canónico

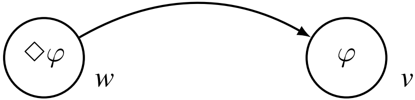
El modelo canónico $M^{\mathbf{K}}$ para **K** (en el lenguaje básico) es $\langle W^{\mathbf{K}}, R^{\mathbf{K}}, V^{\mathbf{K}} \rangle$ donde:

- $W^{\mathbf{K}}$ es el conjunto de todos los **K**-MCSs

Construcción del modelo canónico

El modelo canónico $M^{\mathbf{K}}$ para **K** (en el lenguaje básico) es $\langle W^{\mathbf{K}}, R^{\mathbf{K}}, V^{\mathbf{K}} \rangle$ donde:

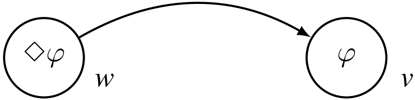
- $W^{\mathbf{K}}$ es el conjunto de todos los **K**-MCSs
- $R^{\mathbf{K}}$ es la relación binaria sobre $W^{\mathbf{K}}$ definida por $R^{\mathbf{K}}wv$ si para toda fórmula φ, $\varphi \in v$ implica $\Diamond\varphi \in w$.



Construcción del modelo canónico

El modelo canónico $M^{\mathbf{K}}$ para $\mathbf{K}$ (en el lenguaje básico) es $\langle W^{\mathbf{K}}, R^{\mathbf{K}}, V^{\mathbf{K}} \rangle$ donde:

- $W^{\mathbf{K}}$ es el conjunto de todos los $\mathbf{K}$-MCSs
- $R^{\mathbf{K}}$ es la relación binaria sobre $W^{\mathbf{K}}$ definida por $R^{\mathbf{K}}wv$ si para toda fórmula φ, $\varphi \in v$ implica $\Diamond\varphi \in w$.



- $V^{\mathbf{K}}$ es la valuación definida como $V^{\mathbf{K}}(p) = \{w \in W^{\mathbf{K}} \mid p \in w\}$

Algunos comentarios sobre el modelo canónico

- La valuación canónica iguala la verdad de un símbolo proposicional en w con su pertenencia a w.

Algunos comentarios sobre el modelo canónico

- La valuación canónica iguala la verdad de un símbolo proposicional en w con su pertenencia a w.
- El objetivo es probar el *truth lemma* que lleva “verdad = pertenencia” al nivel de fórmulas.

Algunos comentarios sobre el modelo canónico

- La valuación canónica iguala la verdad de un símbolo proposicional en w con su pertenencia a w.
- El objetivo es probar el *truth lemma* que lleva “verdad = pertenencia” al nivel de fórmulas.
- Los estados de $M^{\mathbf{K}}$ son *todos* los MCSs **K**-consistentes.

Algunos comentarios sobre el modelo canónico

- La valuación canónica iguala la verdad de un símbolo proposicional en w con su pertenencia a w.
- El objetivo es probar el *truth lemma* que lleva “verdad = pertenencia” al nivel de fórmulas.
- Los estados de $M^{\mathbf{K}}$ son *todos* los MCSs **K**-consistentes.
- La consecuencia de esto es que, dado el lema de Lindenbaum, *cualquier* conjunto **K**-consistente es un subconjunto de algún punto en $M^{\mathbf{K}}$.

Algunos comentarios sobre el modelo canónico

- La valuación canónica iguala la verdad de un símbolo proposicional en w con su pertenencia a w.
- El objetivo es probar el *truth lemma* que lleva “verdad = pertenencia” al nivel de fórmulas.
- Los estados de $M^{\mathbf{K}}$ son *todos* los MCSs **K**-consistentes.
- La consecuencia de esto es que, dado el lema de Lindenbaum, *cualquier* conjunto **K**-consistente es un subconjunto de algún punto en $M^{\mathbf{K}}$.
- Por el truth lemma que vamos a probar después, cualquier conjunto **K**-consistente es verdadero en algún punto del modelo.

Algunos comentarios sobre el modelo canónico

- Esto significa que este *único* modelo $M^{\mathbf{K}}$ es un ‘modelo universal’ para la lógica **K**.

Algunos comentarios sobre el modelo canónico

- Esto significa que este *único* modelo $M^{\mathbf{K}}$ es un ‘modelo universal’ para la lógica **K**.
- Por último, la relación canónica de accesibilidad captura la idea que dos MCSs están ‘coherentemente relacionados’ en función de las fórmulas que valen en cada uno.

Completitud

Estamos en condiciones de probar el siguiente lema, que nos dice que hay ‘suficientes’ MCSs en nuestro modelo para lo que necesitamos:

Existence lemma.
Para cualquier estado $w \in W^{\mathbf{K}}$, si $\Diamond\varphi \in w$ entonces existe un estado $v \in W^{\mathbf{K}}$ tal que $R^{\mathbf{K}}wv$ y $\varphi \in v$.

Completitud

Estamos en condiciones de probar el siguiente lema, que nos dice que hay 'suficientes' MCSs en nuestro modelo para lo que necesitamos:

Existence lemma.
Para cualquier estado $w \in W^{\mathbf{K}}$, si $\Diamond\varphi \in w$ entonces existe un estado $v \in W^{\mathbf{K}}$ tal que $R^{\mathbf{K}}wv$ y $\varphi \in v$.

Demostración:
Supongamos que $\Diamond\varphi \in w$. Vamos a construir v tal que $R^{\mathbf{K}}wv$ y $\varphi \in v$. Sea $v^- = \{\varphi\} \cup \{\psi \mid \Box\psi \in w\}$.

- v^- es consistente. Ejercicio! (y acá hay que hacer demostraciones sintácticas! :P)

Luego por Lindenbaum existe un **K**-MCS v que extiende a v^-. Por construcción, $\varphi \in v$, y para toda fórmula ψ, $\Box\psi \in w$ implica $\psi \in v$.

- Esto último implica que $R^{\mathbf{K}}wv$. Ejercicio!

Completitud

Ahora sí podemos llevar "verdad = pertenencia" al nivel de fórmulas arbitrarias.

Truth lemma.
Para cualquier fórmula φ, $M^{\mathbf{K}}, w \models \varphi$ sii $\varphi \in w$.

Completitud

Ahora sí podemos llevar "verdad = pertenencia" al nivel de fórmulas arbitrarias.

Truth lemma.

Para cualquier fórmula φ, $M^{\mathbf{K}}, w \models \varphi$ sii $\varphi \in w$.

La demo es por inducción en φ. El caso interesante es el modal, y eso está cubierto por el *existence lemma* (la dirección difícil).

Completitud

Ahora sí podemos llevar "verdad = pertenencia" al nivel de fórmulas arbitrarias.

Truth lemma.
Para cualquier fórmula φ, $M^{\mathbf{K}}, w \models \varphi$ sii $\varphi \in w$.

La demo es por inducción en φ. El caso interesante es el modal, y eso está cubierto por el *existence lemma* (la dirección difícil). Finalmente:

Teorema del Modelo Canónico.
K es fuertemente completo con respecto a su modelo canónico.

Completitud

Ahora sí podemos llevar "verdad = pertenencia" al nivel de fórmulas arbitrarias.

Truth lemma.

Para cualquier fórmula φ, $M^{\mathbf{K}}, w \models \varphi$ sii $\varphi \in w$.

La demo es por inducción en φ. El caso interesante es el modal, y eso está cubierto por el *existence lemma* (la dirección difícil). Finalmente:

Teorema del Modelo Canónico.

K es fuertemente completo con respecto a su modelo canónico.

Demostración:

Supongamos que Σ es un conjunto **K**-consistente. Por el lema de Lindenbaum existe un **K**-MCS Σ^+ que extiende a Σ. Por el *truth lemma*, $M^{\mathbf{K}}, \Sigma^+ \models \Sigma$.

Completitud

- Se descubrió que algunos axiomas corresponden a propiedades de la relación de accesibilidad:
  - $\Box p \to p \leftrightsquigarrow R$ es reflexiva
  - $\Box p \to \Box\Box p \leftrightsquigarrow R$ es transitiva

Kripke, Saul.
A completeness theorem in modal logics.
The Journal of Symbolic Logic, 24, 1959.

Kripke, Saul.
Semantical analysis of modal logic I. Normal modal propositional calculi.
Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 9:67–96, 1963.

Completitud via axiomas de reducción

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje, y sea Δ una lógica modal construida sobre el lenguaje $\mathcal{L}$.

Completitud via axiomas de reducción

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje, y sea Δ una lógica modal construida sobre el lenguaje $\mathcal{L}$.
2. Sea $\mathcal{L}'$ una extensión de $\mathcal{L}$ con un nuevo operador (Ejemplo: LAP extiende LMB con el operador $[!\psi]$).

Completitud via axiomas de reducción

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje, y sea Δ una lógica modal construida sobre el lenguaje $\mathcal{L}$.
2. Sea $\mathcal{L}'$ una extensión de $\mathcal{L}$ con un nuevo operador (Ejemplo: LAP extiende LMB con el operador $[!\psi]$).
3. Supongamos que tenemos un conjunto de equivalencias en $\mathcal{L}'$ (es decir, fórmulas de la forma $\psi \leftrightarrow \psi'$) tal que dichas equivalencias permiten transformar cualquier fórmula de $\mathcal{L}'$ en una fórmula de $\mathcal{L}$, que sea equivalente. Llamamos a estas fórmulas axiomas de reducción.

Completitud via axiomas de reducción

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje, y sea Δ una lógica modal construida sobre el lenguaje $\mathcal{L}$.
2. Sea $\mathcal{L}'$ una extensión de $\mathcal{L}$ con un nuevo operador (Ejemplo: LAP extiende LMB con el operador $[!\psi]$).
3. Supongamos que tenemos un conjunto de equivalencias en $\mathcal{L}'$ (es decir, fórmulas de la forma $\psi \leftrightarrow \psi'$) tal que dichas equivalencias permiten transformar cualquier fórmula de $\mathcal{L}'$ en una fórmula de $\mathcal{L}$, que sea equivalente. Llamamos a estas fórmulas axiomas de reducción.
4. En particular, me permite transformar aquellas que son tautologías.

Completitud via axiomas de reducción

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje, y sea Δ una lógica modal construida sobre el lenguaje $\mathcal{L}$.
2. Sea $\mathcal{L}'$ una extensión de $\mathcal{L}$ con un nuevo operador (Ejemplo: LAP extiende LMB con el operador $[!\psi]$).
3. Supongamos que tenemos un conjunto de equivalencias en $\mathcal{L}'$ (es decir, fórmulas de la forma $\psi \leftrightarrow \psi'$) tal que dichas equivalencias permiten transformar cualquier fórmula de $\mathcal{L}'$ en una fórmula de $\mathcal{L}$, que sea equivalente. Llamamos a estas fórmulas axiomas de reducción.
4. En particular, me permite transformar aquellas que son tautologías.
5. Entonces, una tautología de $\mathcal{L}'$ es tautología de $\mathcal{L}$; por completitud de Δ, también es un teorema de Δ.

Completitud via axiomas de reducción

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje, y sea Δ una lógica modal construida sobre el lenguaje $\mathcal{L}$.
2. Sea $\mathcal{L}'$ una extensión de $\mathcal{L}$ con un nuevo operador (Ejemplo: LAP extiende LMB con el operador $[!\psi]$).
3. Supongamos que tenemos un conjunto de equivalencias en $\mathcal{L}'$ (es decir, fórmulas de la forma $\psi \leftrightarrow \psi'$) tal que dichas equivalencias permiten transformar cualquier fórmula de $\mathcal{L}'$ en una fórmula de $\mathcal{L}$, que sea equivalente. Llamamos a estas fórmulas axiomas de reducción.
4. En particular, me permite transformar aquellas que son tautologías.
5. Entonces, una tautología de $\mathcal{L}'$ es tautología de $\mathcal{L}$; por completitud de Δ, también es un teorema de Δ.
6. Por lo tanto, Δ + los axiomas de reducción forman un sistema completo para $\mathcal{L}'$.

Nota sobre sustitución

- Presentamos a **K** como LP +:
  - Axioma K: $\Box(p \to q) \to \Box p \to \Box q$
  - Reglas: MP, **(Nec)** (si $\vdash \varphi$ entonces $\vdash \Box\varphi$), y sustitución (si $\vdash \varphi(p)$ entonces $\vdash \varphi[p/\psi]$).
- Pero dijimos que sustitución no vale en LAP, entonces no podemos usar esta construcción para LAP!
- Presentación alternativa con axiomas esquema:
  - Axioma K: $\Box(\varphi \to \psi) \to \Box\varphi \to \Box\psi$.
  - Reglas: MP y **(Nec)** (si $\vdash \varphi$ entonces $\vdash \Box\varphi$).
- Para **K** es equivalente, pero para LAP no lo es.
- A partir de ahora trabajaremos con axiomas esquema.

Completitud para LAP

Teorema.
K + los axiomas de reducción forman un sistema correcto y fuertemente completo para LAP con respecto a la clase de todos los modelos.

Demostración.
Sea φ un teorema de LAP, obtengo φ' en LMB usando los axiomas de reducción. Como **K** es completa para LMB sobre la clase de todos los modelos, φ' es demostrable en esta clase.

Lógicas Estáticas vs. Lógicas Dinámicas

- Nos movimos a trabajar con operadores dinámicos, pero usando herramientas clásicas de la lógica modal.

Lógicas Estáticas vs. Lógicas Dinámicas

- Nos movimos a trabajar con operadores dinámicos, pero usando herramientas clásicas de la lógica modal.
- Pero dijimos que una lógica dinámica (LAP), es igualmente expresiva que la lógica estática LMB.

Lógicas Estáticas vs. Lógicas Dinámicas

- Nos movimos a trabajar con operadores dinámicos, pero usando herramientas clásicas de la lógica modal.
- Pero dijimos que una lógica dinámica (LAP), es igualmente expresiva que la lógica estática LMB. (Bisimulaciones? **(Ejercicio)**.)

Lógicas Estáticas vs. Lógicas Dinámicas

- Nos movimos a trabajar con operadores dinámicos, pero usando herramientas clásicas de la lógica modal.
- Pero dijimos que una lógica dinámica (LAP), es igualmente expresiva que la lógica estática LMB. (Bisimulaciones? **(Ejercicio).**)
- ¿Decepcionados? No, porque a veces podemos representar estáticamente el operador dinámico, pero con algunas consecuencias.

Lógicas Estáticas vs. Lógicas Dinámicas

- Nos movimos a trabajar con operadores dinámicos, pero usando herramientas clásicas de la lógica modal.
- Pero dijimos que una lógica dinámica (LAP), es igualmente expresiva que la lógica estática LMB. (Bisimulaciones? **(Ejercicio).**)
- ¿Decepcionados? No, porque a veces podemos representar estáticamente el operador dinámico, pero con algunas consecuencias.
- Mencionamos por ejemplo, que potencialmente tenemos una explosión exponencial en el tamaño de las fórmulas. A veces puede ser peor.

Lo que vimos hoy

- Nuestra primera lógica dinámica: Lógica de Anuncios Públicos (LAP).
- Algunas propiedades generales (fenómeno de Moore y falla de sustitución).
- Con: LAP no agrega poder expresivo a LMB.
- Pro: obtenemos completitud con axiomas de reducción + completitud del lenguaje base.
- Vimos la demostración estándar de completitud para lógicas modales.

Lo que viene

- Más lógicas dinámicas.
- Lógica modal de sabotaje.
- Expresividad (no hay axiomas de reducción).
- Otras propiedades.