Lógicas Modales Dinámicas

Clase #3

Carlos Areces & Raul Fervari

Febrero 2024, Río Cuarto, Argentina

Hasta ahora

- Lógica Modal Básica (LMB).
- Expresividad y Axiomatizaciones.
- Lógica de Anuncios Públicos (LAP).
- Expresividad: Igual a LMB.
- Axiomatización: Mediante axiomas de reducción.

Plan para hoy

- Cerramos axiomatización de LMB y LAP.
- Vamos a considerar otra alternativa de lógica dinámica.
- Introduciremos una lógica que elimina ejes en la relación de accesibilidad: *sabotage logic*.
  - Nos ayudará a comprender los efectos de tener operadores (realmente) dinámicos en el lenguaje.
  - Como venimos haciendo, discutimos: expresividad?, complejidad?, axiomatización?
- Vamos a mencionar otras alternativas de operadores dinámicos.

Axiomatización y Completitud de **K**

- El sistema axiomático **K** es el menor conjunto de fórmulas modales Δ que contiene:
    1. Todas las tautologías proposicionales.
    2. El axioma (K): $\quad \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$.

  y está cerrado por:
    1. *modus ponens*: Si $\varphi \in \Delta$ y $\varphi \rightarrow \psi \in \Delta$ entonces $\psi \in \Delta$.
    2. *sustitución uniforme*: Si $\varphi \in \Delta$ entonces $\varphi[p/\psi] \in \Delta$ para cualquier $p \in \mathsf{PROP}$, y cualquier ψ.
    3. *necesitación* (Nec): $\varphi \in \Delta$ entonces $\Box\varphi \in \Delta$.
- Si $\varphi \in \Delta$ decimos que φ es un *teorema* de **K** ($\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$).
- Charlamos la demo de completitud por construcción del Modelo Canónico $M^{\mathbf{K}}$ que satisface todas las fórmulas **K**-consistentes.

Ejemplo de demostración

- Probemos que $\vdash_{\mathbf{K}} \Box A \to \Box(B \to A)$

1.	$A \to (B \to A)$	Taut
2.	$\Box(A \to (B \to A))$	Nec, 1
3.	$\Box(A \to (B \to A)) \to (\Box A \to \Box(B \to A))$	K
4.	$\Box A \to \Box(B \to A)$	MP, 2, 3

Completitud para **K**

1. **K** es completa sii toda fórmula φ **K**-consistente (i.e., no pasa $\varphi \vdash_{\mathbf{K}} \bot$) es satisfacible.
2. Lema de Lindenbaum: Todo conjunto consistente puede extenderse a uno maximal consistente (MCS).
3. $M^{\mathbf{k}}$ tiene por estados a todos MCS.
4. Lema de la Verdad y la Pertenencia (Truth Lemma): Si Δ es un estado de $M^{\mathbf{K}}$ y $\varphi \in \Delta$ entonces $M^{\mathbf{K}}, \Delta \models \varphi$.

Completitud via axiomas de reducción

1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje, y sea Δ una lógica modal construida sobre el lenguaje $\mathcal{L}$.
2. Sea $\mathcal{L}'$ una extensión de $\mathcal{L}$ con un nuevo operador (Ejemplo: **PAL** extiende LMB con el operador $[!\psi]$).
3. Supongamos que tenemos un conjunto de equivalencias en $\mathcal{L}'$ (es decir, fórmulas de la forma $\psi \leftrightarrow \psi'$) tal que dichas equivalencias permiten transformar cualquier fórmula de $\mathcal{L}'$ en una fórmula de $\mathcal{L}$, que sea equivalente. Llamamos a estas fórmulas axiomas de reducción.
4. En particular, me permite transformar aquellas que son tautologías.
5. Entonces, una tautología de $\mathcal{L}'$ es tautología de $\mathcal{L}$; por completitud de Δ, también es un teorema de Δ.
6. Por lo tanto, Δ + los axiomas de reducción forman un sistema completo para $\mathcal{L}'$.

Nota sobre sustitución

- Presentamos a **K** como LP +:
  - Axioma K: $\Box(p \to q) \to \Box p \to \Box q$
  - Reglas: MP, **(Nec)** (si $\vdash \varphi$ entonces $\vdash \Box\varphi$), y sustitución (si $\vdash \varphi(p)$ entonces $\vdash \varphi[p/\psi]$).
- Pero dijimos que sustitución no vale en LAP, entonces no podemos usar esta construcción para LAP!
- Presentación alternativa con axiomas esquema:
  - Axioma K: $\Box(\varphi \to \psi) \to \Box\varphi \to \Box\psi$.
  - Reglas: MP y **(Nec)** (si $\vdash \varphi$ entonces $\vdash \Box\varphi$).
- Para **K** es equivalente, pero para LAP no lo es.
- A partir de ahora trabajaremos con axiomas esquema.

Completitud para **PAL**

Teorema.

K + los axiomas de reducción forman un sistema correcto y fuertemente completo para **PAL** con respecto a la clase de todos los modelos.

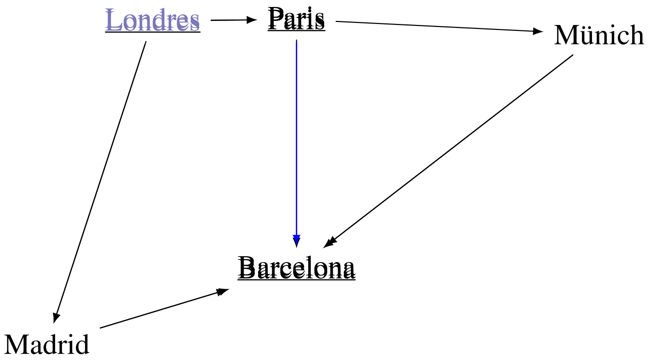
Demostración.

Sea φ un teorema de **PAL**, obtengo φ' en LMB usando los axiomas de reducción. Como **K** es completa para LMB sobre la clase de todos los modelos, φ' es demostrable en esta clase.

Lógicas Estáticas vs. Lógicas Dinámicas

- Nos movimos a trabajar con operadores dinámicos, pero usando herramientas clásicas de la lógica modal.
- Pero dijimos que una lógica dinámica (**PAL**), es igualmente expresiva que la lógica estática LMB. (Bisimulaciones? **(Ejercicio).**)
- ¿Decepcionados? No, porque a veces podemos representar estáticamente el operador dinámico, pero con algunas consecuencias.
- Mencionamos por ejemplo, que potencialmente tenemos una explosión exponencial en el tamaño de las fórmulas. A veces puede ser peor.

Cambiando el acceso



Una nueva lógica modal dinámica

Podemos extender la lógica modal básica, con un operador que modela sabotaje:

$$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \varphi \text{ sii existe } (v, v') \in R \text{ tq. } \mathcal{M}^{-}_{vv'}, w \models \varphi,$$

donde

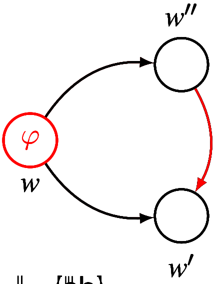
$$\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle \qquad \mathcal{M}^{-}_{wv} = \langle W, R^{-}_{vv'}, V \rangle$$

$$R^{-}_{vv'} = R \setminus \{(v, v')\}$$

Definimos LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a la lógica LMB extendida con $\langle \mathsf{sb} \rangle$.

Definimos $[\mathsf{sb}]\varphi := \neg\langle \mathsf{sb} \rangle\neg\varphi$.

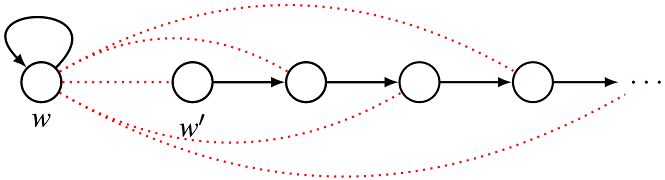
Ejemplo



$\mathcal{M}, w \models [\$b]\varphi$

Poder Expresivo: Modelos de Árbol

Consideremos los siguientes modelos:



Los modelos son bisimilares para la LMB.

Observación: el modelo de la derecha es un árbol.

Tree Model Property para LMB

Teorema:
La LMB tiene la tree model property: para toda fórmula φ de LMB, si φ es satisfacible entonces φ es también satisfacible en la raíz de un árbol.

Idea de la prueba:
Sea $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ y $w \in W$, tal que $\mathcal{M}, w \models \varphi$. Construimos un árbol $\mathcal{T} = \langle W', R', V' \rangle$:

1. Tomar todas las secuencias de puntos que empiezan en w y que son alcanzables via R.
2. A cada secuencia $w \dots v$, le damos la misma valuación que v.
3. Si $(v, u) \in R$, ponemos $(w, \dots v, w \dots vu)$ en R'.
4. $\mathcal{T}$ es un árbol y $\mathcal{T}, w \models \varphi$.

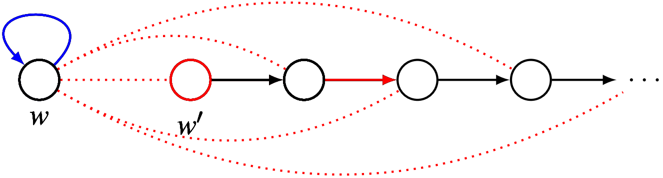
Tree Model Property para LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

Teorema:
LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) no tiene la tree model property.

Demo.
La fórmula $\Diamond\Diamond\top \wedge [\mathsf{sb}]\Box\bot$ es satisfacible (pensar en un único nodo con un loop) pero no se satisface en la raíz de un árbol.

Corolario.
LMB $<$ LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$); es decir, LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) es estrictamente más expresiva que LMB.

Bisimulaciones



[sb] $\Box\bot$ ~~[sb]~~ $\Box\bot$

Bisimulaciones y Poder Expresivo

- LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) más expresiva que LMB significa LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) captura ciertas propiedades que LMB no puede capturar.
- Las bisimulaciones relacionan estados o mundos con propiedades parecidas.
- Para LMB, estas son: información proposicional (atom), e información sobre los sucesores (zig y zag).
- Para sabotage, estas condiciones no son suficientes.
- ¿Qué propiedades necesitamos para sabotage?
- Claramente, información sobre la eliminación de ejes.

LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-bisimulaciones

En este caso, las bisimulaciones relaciona pares (estado,ejes).

Sean $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ y $\mathcal{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ dos modelos.
$Z \subseteq (W \times 2^{W^2}) \times (W' \times 2^{W'^2})$ es una bisimulación si $(w, S)Z(w', S')$ implica:

(Atomic Harmony) $w \in V(p)$ sii $w' \in V'(p)$, para todo $p \in \mathsf{PROP}$;
(Zig) si $(w, v) \in S$ entonces existe v' tq. $(w', v') \in S'$ y $(v, S)Z(v', S')$;
(Zag) si $(w', v') \in S'$ entonces existe v tq. $(w, v) \in S$ y $(v, S)Z(v', S')$;
($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zig) si $(x, y) \in S$ entonces existe $(x', y') \in S'$ tq. $(w, S^{-}_{xy})Z(w', S'^{-}_{x'y'})$;
($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zag) si $(x', y') \in S'$ entonces existe $(x, y) \in S$ tq. $(w, S^{-}_{xy})Z(w', S'^{-}_{x'y'})$.

$\mathcal{M}, w \leftrightarrows_{\mathrm{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ si $\exists$ una bisimulación Z tq. $(w, R)Z(w', R')$.

Teorema de Invarianza

Teorema

Si $\mathcal{M}, w \leftrightarroweq_{\text{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$ entonces $\mathcal{M}, w \equiv_{\text{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \mathcal{M}', w'$.

Vamos a generalizar este enunciado:

Hipótesis inductiva

Para todo $S \subseteq W^2, S' \subseteq W'^2$, $(w, S)Z(w', S')$ implica $\langle W, S, V \rangle, w \equiv_{\text{LMB}(\langle \mathsf{sb} \rangle)} \langle W', S', V' \rangle, w'$.

Demo.

Consideremos el caso para $\langle \mathsf{sb} \rangle \varphi$. Supongamos $\langle W, S, V \rangle, w \models \langle \mathsf{sb} \rangle \psi$.
Entonces existe $(x, y) \in S$ tq. $\langle W, S^-_{x,y}, V \rangle, w \models \psi$.
Por ($\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zig), existe $(x', y') \in S'$ tq. $(w, S^-_{xy})Z(w', S'^-_{x'y'})$.
Por HI, $\langle W', S'^-_{x'y'}, V' \rangle, w' \models \psi$ y por ($\models$) $\langle W', S', V' \rangle, w' \models \langle \mathsf{sb} \rangle \psi$.
Para la otra dirección usamos $\langle \mathsf{sb} \rangle$-Zag.

Lógicas Modales como Fragmentos de Primer Orden

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{ST}_x(p) & = & P(x) \\ \mathsf{ST}_x(\neg\varphi) & = & \neg\mathsf{ST}_x(\varphi) \\ \mathsf{ST}_x(\varphi \wedge \psi) & = & \mathsf{ST}_x(\varphi) \wedge \mathsf{ST}_x(\psi) \\ \mathsf{ST}_x(\Diamond\varphi) & = & \exists y.(R(x,y) \wedge \mathsf{ST}_y(\varphi)) \end{array}$$

donde y es una variable no utilizadas aún en la traducción.

- $\mathsf{ST}_x(\varphi)$ le hace corresponder, a cada fórmula φ, una fórmula de primer orden con exactamente una variable libre x.
- Esta variable libre da cuenta del punto de evaluación en la semántica modal (recordar la "perspectiva interna").

Teorema

Para toda fórmula φ de la lógica modal básica, todo modelo $\mathcal{M}$, todo w en el dominio de $\mathcal{M}$ y toda asignación g,

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \text{ sii } \mathcal{M}, g[x \mapsto w] \models \mathsf{ST}_x(\varphi)$$

Traducimos LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a LPO

Escribimos xy en vez de (x, y), y definimos:

$$\begin{array}{lll} nm = xy & \text{se define como} & n = x \wedge m = y \\ nm \neq xy & \text{se define como} & n \neq x \ \vee \ m \neq y \\ nm \in S & \text{se define como} & \bigvee_{xy \in S} nm = xy, \ \text{and} \\ nm \notin S & \text{se define como} & \bigwedge_{xy \in S} nm \neq xy, \end{array}$$

donde S es un conjunto finito de pares de variables.
En particular, $nm \in \emptyset$ es equivalente a $\perp$ y $nm \notin \emptyset$ es equivalente a $\top$.
Tambíen definimos: $S^{-1} = \{mn \mid nm \in S\}$.

Traducción Estándar de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) a FOL

Los casos no triviales de la traducción ST son:

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{ST}_{x,S}(\Diamond\varphi) & = & \exists y.(R(x,y) \land xy \notin S \land \mathsf{ST}_{y,S}(\varphi)) \\ \mathsf{ST}_{x,S}(\langle \mathsf{sb} \rangle\varphi) & = & \exists yy'.(R(y,y') \land yy' \notin S \land \mathsf{ST}_{x,S\cup yy'}(\varphi)) \end{array}$$

donde y y y' son variables no utilizadas aún en la traducción.

- S guarda los pares que fueron borrados.
- Para $\langle r \rangle$ necesitamos agregar la condición $xy \notin S$.
- Recordar: $nm \notin S = \bigwedge_{xy \in S} nm \neq xy$
- Similar para $\langle \mathsf{sb} \rangle$, pero agregando el nuevo par eliminado a S.

Teorema

Para toda fórmula φ de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$), todo modelo $\mathcal{M}$, todo w en el dominio de $\mathcal{M}$ y toda asignación g,

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \textit{ sii } \mathcal{M}, g[x \mapsto w] \models ST_{x,\emptyset}(\varphi)$$

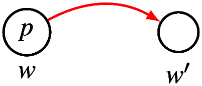
Complejidad de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-SAT

- Sabemos que LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-SAT es más expresiva que LMB (e.g., puede forzar un loop en un nodo.)
- Cuanto más?
- Expresividad y Complejidad van de la mano. Usualmente, a mayor expresividad de un lenguaje, más difícil es razonar con él.
- Ejemplo: SAT para LPO es indecidible.
- Cuál será la complejidad de LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)-SAT? Indecidible!

C. Areces, R. Fervari, G. Hoffmann, and M. Martel.
Satisfiability for relation-changing logics.
Journal of Logic and Computation, 28(7):1443–1470, 2018.

Axiomatizando LMB($\langle\mathsf{sb}\rangle$)

- Consideremos la fórmula $\varphi = p \wedge \Diamond\top \rightarrow \langle\mathsf{sb}\rangle p$. Es una fórmula válida.
- Si reemplazo p por $\langle\mathsf{sb}\rangle p$ en φ, obtenemos $\langle\mathsf{sb}\rangle p \wedge \Diamond\top \rightarrow \langle\mathsf{sb}\rangle\langle\mathsf{sb}\rangle p$.



$$\langle\mathsf{sb}\rangle p \wedge \Diamond\top \rightarrow \langle\mathsf{sb}\rangle\cancel{\langle\mathsf{sb}\rangle p}$$

- Corolario: Sustitución uniforme falla en LMB($\langle\mathsf{sb}\rangle$).

CONTINUARÁ!

Otras transformaciones

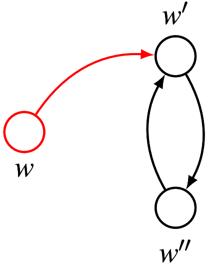
Consideremos los siguientes operadores sobre relaciones:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}^+_{wv} = \langle W, R^+_{wv}, V \rangle & R^+_{wv} & = & R \cup \{(w,v)\} \\ \mathcal{M}^*_{wv} = \langle W, R^*_{wv}, V \rangle & R^*_{wv} & = & (R \backslash \{(v,w)\}) \cup \{(w,v)\}. \end{array}$$

Definimos dos nuevas modalidades (bridge y swap):

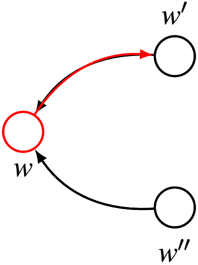
$$\begin{array}{rll} \mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{br} \rangle \varphi & \text{sii} & \text{existe v,v' tq. } (v, v') \notin R \text{ y } \mathcal{M}^+_{vv'}, w \models \varphi \\ \mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sw} \rangle \varphi & \text{sii} & \text{existe v,v' tq. } (v, v') \in R \text{ y } \mathcal{M}^*_{vv'}, w \models \varphi \end{array}$$

Bridge Logic - Ejemplo



$$\mathcal{M}^{+}_{ww'}, w \models \langle br \rangle \Diamond \top$$

Swap Logic - Ejemplo



$\mathcal{M}, w \models \langle \mathsf{sw} \rangle \Diamond \top$

$\mathcal{M}^*_{w'w}, w' \models \Diamond \top$

Lo que vimos hoy

- Nuestra primera lógica dinámica mas expresiva LMB: lógica de sabotaje.
  - Falla de la Tree Model Property.
  - Bisimulación.
  - Traducción a FOL.
  - Falla de Sustitución Uniforme.
- Otros operadores dinámicos.

Lo que viene

- Cómo axiomatizamos LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)?