Lógicas Modales Dinámicas

Clase #4

Carlos Areces & Raul Fervari

Febrero 2024, Río Cuarto, Argentina

Hasta ahora

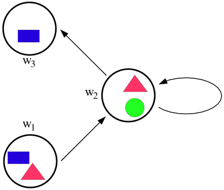
- Introdujimos LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$) como ejemplo de una lógica dinámica más expresiva que LMB.
- Vimos que:
  - No tiene la Tree Model Property.
  - Tiene falla de sustitución uniforme.
  - Es un fragmento de FOL.
  - Su SAT es indecidible.

Plan para hoy

- Axiomatizamos LMB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)
- Nuestra estrategia:
  - Usamos axiomas de reducción (como con LAP).
  - Pero no sobre LMB (no tiene suficiente poder expresivo!)
  - …sino sobre lógicas híbridas.
  - Introducimos una nueva (mejor) técnica para completitud: Modelos de Henkin.

Lógicas Híbridas

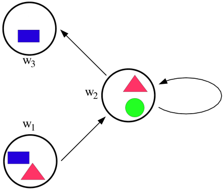
Volvamos al ejemplo de las figuras geométricas. ¿Podemos decir en LMB?



- ¿Puede w_1 verse a sí mismo?
- ¿Son w_1 y w_2 el mismo estado?
- ¿Son w_1 y w_2 estados distintos?

Lógicas Híbridas

Volvamos al ejemplo de las figuras geométricas. ¿Podemos decir en LMB?



- ¿Puede w_1 verse a sí mismo?
- ¿Son w_1 y w_2 el mismo estado?
- ¿Son w_1 y w_2 estados distintos?

- Lo que necesitamos para expresar esto es poder nombrar mundos, y una noción de igualdad.

Lógicas Híbridas

La Lógica Híbrid Básica LHB (alias $\mathcal{H}(@)$, alias $\mathcal{H}(:)$) es la extensión de LMB con:

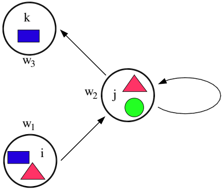
- nombres (nominales): son un nuevo conjunto de símbolos atómicos, que representan a los estados. La clave es que cada nominal tiene que ser cierto en un único estado. En general se escriben como $i, j, k, \ldots$
- @: el operador 'at'. $@_i\varphi$ es verdadera sii φ es verdadera en el mundo nombrado por i.

Lógicas Híbridas

La Lógica Híbrid Básica LHB (alias $\mathcal{H}(@)$, alias $\mathcal{H}(:)$) es la extensión de LMB con:

- nombres (nominales): son un nuevo conjunto de símbolos atómicos, que representan a los estados. La clave es que cada nominal tiene que ser cierto en un único estado. En general se escriben como $i, j, k, \ldots$
- @: el operador 'at'. $@_i\varphi$ es verdadera sii φ es verdadera en el mundo nombrado por i.

Ahora podemos expresar…



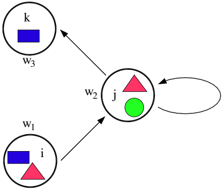
- ¿Puede w_1 verse a sí mismo?
  $@_i\langle see\rangle i$

Lógicas Híbridas

La Lógica Híbrid Básica LHB (alias $\mathcal{H}(@)$, alias $\mathcal{H}(:)$) es la extensión de LMB con:

- nombres (nominales): son un nuevo conjunto de símbolos atómicos, que representan a los estados. La clave es que cada nominal tiene que ser cierto en un único estado. En general se escriben como $i, j, k, \ldots$
- @: el operador 'at'. $@_i\varphi$ es verdadera sii φ es verdadera en el mundo nombrado por i.

Ahora podemos expresar…



- ¿Puede w_1 verse a sí mismo?
  $@_i\langle see\rangle i$
- ¿Son w_1 y w_2 estados distintos?
  $@_i\neg j$

Lógicas Híbridas

Entonces, la definición de la sintaxis es:

- A la signatura $\langle \text{PROP}, \text{REL} \rangle$ que teníamos antes, le tenemos que agregar un nuevo conjunto $\text{NOM} = \{i, j, k, \dots\}$ de nominales.
- Las fórmulas bien formadas ahora son:

$$\text{FORM} := p \mid i \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \langle r \rangle \varphi \mid @_i \varphi$$

  en donde $p \in \text{PROP}$, $r \in \text{REL}$, $i \in \text{NOM}$ y $\varphi, \psi \in \text{FORM}$.
- ¿Hay que hacer algún cambio en lo modelos? ¿Cómo es la semántica de LHB?

Lógicas Híbridas

Entonces, la definición de la sintaxis es:

- A la signatura $\langle \text{PROP}, \text{REL} \rangle$ que teníamos antes, le tenemos que agregar un nuevo conjunto $\text{NOM} = \{i, j, k, \dots\}$ de nominales.
- Las fórmulas bien formadas ahora son:

$$\text{FORM} := p \mid i \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \langle r \rangle \varphi \mid @_i \varphi$$

  en donde $p \in \text{PROP}$, $r \in \text{REL}$, $i \in \text{NOM}$ y $\varphi, \psi \in \text{FORM}$.
- ¿Hay que hacer algún cambio en lo modelos? ¿Cómo es la semántica de LHB?
- Necesitamos interpretar los símbolos de NOM. Usamos una asignación $n : \text{NOM} \to W$.

  Sea un modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, V, n \rangle$ definimos

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{M}, w \models i & \text{sii} & n(i) = w \\ \mathcal{M}, w \models @_i\varphi & \text{sii} & \mathcal{M}, n(i) \models \varphi \end{array}$$

Lógicas Híbridas como Fragmentos de Primer Orden

$$\begin{array}{lcll} \mathsf{ST}_x(i) & = & c_i = x, & i \in \text{NOM}, c_i \in \text{CONS} \\ \mathsf{ST}_x(@_i\varphi) & = & \mathsf{ST}_x(\varphi)[x/c_i] & \end{array}$$

Lógicas Híbridas como Fragmentos de Primer Orden

$$\begin{array}{lcll} \mathsf{ST}_x(i) & = & c_i = x, & i \in \text{NOM}, c_i \in \text{CONS} \\ \mathsf{ST}_x(@_i\varphi) & = & \mathsf{ST}_x(\varphi)[x/c_i] & \end{array}$$

- $\mathsf{ST}_x(@_i\varphi)$ es una sentencia (no tiene variables libres).

Lógicas Híbridas como Fragmentos de Primer Orden

$$\begin{array}{lcll} \mathsf{ST}_x(i) & = & c_i = x, & i \in \text{NOM}, c_i \in \text{CONS} \\ \mathsf{ST}_x(@_i\varphi) & = & \mathsf{ST}_x(\varphi)[x/c_i] & \end{array}$$

- $\mathsf{ST}_x(@_i\varphi)$ es una sentencia (no tiene variables libres). $@_i\varphi$ es una fórmula global. Si es verdadera, lo es en todo el modelo. Si es falsa, es falsa en todo el modelo.
- $@_i\varphi$ es su propio dual. $@_i\varphi \leftrightarrow \neg @_i \neg\varphi$ es una tautología.

Lógicas Híbridas como Fragmentos de Primer Orden

$$\begin{array}{lcll} \mathsf{ST}_x(i) & = & c_i = x, & i \in \text{NOM}, c_i \in \text{CONS} \\ \mathsf{ST}_x(@_i\varphi) & = & \mathsf{ST}_x(\varphi)[x/c_i] & \end{array}$$

- $\mathsf{ST}_x(@_i\varphi)$ es una sentencia (no tiene variables libres). $@_i\varphi$ es una fórmula global. Si es verdadera, lo es en todo el modelo. Si es falsa, es falsa en todo el modelo.
- $@_i\varphi$ es su propio dual. $@_i\varphi \leftrightarrow \neg @_i \neg\varphi$ es una tautología.

Teorema

Para toda fórmula φ de LHB, todo modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, V, n\rangle$, todo w en el dominio de $\mathcal{M}$ y toda asignación g,

$$\mathcal{M}, w \models \varphi \text{ sii } \mathcal{M}, g[x \mapsto w] \models \mathsf{ST}_x(\varphi)$$

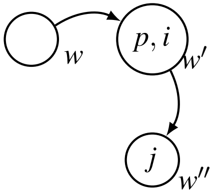
donde n interpreta las constantes.

Lógicas Híbridas

-

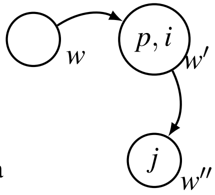
  Ejemplos: $i, j \in \textsc{nom}$

  - $\mathcal{M}, w \models @_i p$
  - $\mathcal{M}, w \models @_j @_i p$

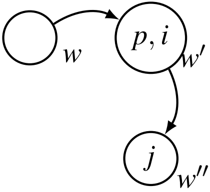


Lógicas Híbridas

- Ejemplos: $i, j \in \mathrm{NOM}$
  - $\mathcal{M}, w \models @_i p$
  - $\mathcal{M}, w \models @_j @_i p$
  - $i \wedge p \to @_i p$ es una tautología
  - $@_i p \to (i \wedge p)$ no lo es



Lógicas Híbridas



-
  Ejemplos: $i, j \in \text{NOM}$
  - $\mathcal{M}, w \models @_i p$
  - $\mathcal{M}, w \models @_j @_i p$
  - $i \wedge p \rightarrow @_i p$ es una tautología
  - $@_i p \rightarrow (i \wedge p)$ no lo es
- Las primeras ideas detrás de las lógicas híbridas se remontan a Arthur Prior, pero su desarrollo moderno floreció con el trabajo de Blackburn y Seligman (demasiadas referencias para citarlas todas, ver abajo).

Areces, C. y ten Cate, B.
Lógicas Híbridas.
En Blackburn, P., Wolter, F., y van Benthem, J., editores, *Handbook of Modal Logics*, pp. 821–868, Elsevier, 2006.

Hechos Híbridos

- El lenguaje híbrido básico (LHB) es más expresivo que el lenguaje modal básico LMB.
  - Por ejemplo, $i \wedge \Diamond i$ fuerza que el punto de evaluación sea reflexivo.

Hechos Híbridos

- El lenguaje híbrido básico (LHB) es más expresivo que el lenguaje modal básico LMB.
  - Por ejemplo, $i \wedge \Diamond i$ fuerza que el punto de evaluación sea reflexivo.
- El problema de satisfacibilidad de ambos tiene la misma complejidad. Ambos son PSPACE-completos.

Hechos Híbridos

- El lenguaje híbrido básico (LHB) es más expresivo que el lenguaje modal básico LMB.
  - Por ejemplo, $i \wedge \Diamond i$ fuerza que el punto de evaluación sea reflexivo.
- El problema de satisfacibilidad de ambos tiene la misma complejidad. Ambos son PSPACE-completos.
- Pero más importante para esta parte del curso, ahora podemos usar los nominales como testigos de Henkin.

Más Historia

- La prueba de completitud de Kripke empleó una generalización del método de completitud via tableaux de Beth para LP.
- La completitud se estableció mostrando cómo derivar una prueba de un intento fallido de encontrar un contraejemplo.

Más Historia

- La prueba de completitud de Kripke empleó una generalización del método de completitud via tableaux de Beth para LP.
- La completitud se estableció mostrando cómo derivar una prueba de un intento fallido de encontrar un contraejemplo.
- Kaplan (1966) criticó la prueba de Kripke por carecer de rigor y por hacer un uso excesivo de argumentos “intuitivos” sobre la geometría de los tableaux.
- Sugirió un enfoque diferente, argumentando que era más elegante, basado en una adaptación de la prueba de completitud basada en modelos de Henkin para la lógica de primer orden.

  (Kaplan no fue el primero ni el único: Bayart 1959, Makinson 1966, Cresswell 1967).

Más Historia

- La prueba de completitud de Kripke empleó una generalización del método de completitud via tableaux de Beth para LP.
- La completitud se estableció mostrando cómo derivar una prueba de un intento fallido de encontrar un contraejemplo.
- Kaplan (1966) criticó la prueba de Kripke por carecer de rigor y por hacer un uso excesivo de argumentos "intuitivos" sobre la geometría de los tableaux.
- Sugirió un enfoque diferente, argumentando que era más elegante, basado en una adaptación de la prueba de completitud basada en modelos de Henkin para la lógica de primer orden.
  (Kaplan no fue el primero ni el único: Bayart 1959, Makinson 1966, Cresswell 1967).

Negri, S.
Kripke completeness revisited
In G. Primiero (ed.), *Acts of Knowledge: History, Philosophy and Logic*. College Publications. pp. 233–266 (2009)

Completitud de Henkin

- La prueba de completitud de Henkin para la lógica de primer orden utiliza (al menos) dos ideas importantes
  1. Un conjunto consistente de fórmulas se puede extender a un conjunto de fórmulas maximalmente consistente.
  2. Los cuantificadores existenciales pueden ser atestiguados (witnessed) utilizando constantes, que luego se pueden utilizar para formar el dominio del modelo.

Completitud de Henkin

- La prueba de completitud de Henkin para la lógica de primer orden utiliza (al menos) dos ideas importantes
  1. Un conjunto consistente de fórmulas se puede extender a un conjunto de fórmulas maximalmente consistente.
  2. Los cuantificadores existenciales pueden ser atestiguados (witnessed) utilizando constantes, que luego se pueden utilizar para formar el dominio del modelo.
- (1) es clave en las pruebas modernas de completitud para lógicas modales proposicionales, que construyen un modelo canónico (que satisface todas las fórmulas consistentes) que tiene como dominio el conjunto (no numerable) de todos los conjuntos de fórmulas maximalmente consistentes.

Completitud de Henkin

- La prueba de completitud de Henkin para la lógica de primer orden utiliza (al menos) dos ideas importantes
  1. Un conjunto consistente de fórmulas se puede extender a un conjunto de fórmulas maximalmente consistente.
  2. Los cuantificadores existenciales pueden ser atestiguados (witnessed) utilizando constantes, que luego se pueden utilizar para formar el dominio del modelo.
- (1) es clave en las pruebas modernas de completitud para lógicas modales proposicionales, que construyen un modelo canónico (que satisface todas las fórmulas consistentes) que tiene como dominio el conjunto (no numerable) de todos los conjuntos de fórmulas maximalmente consistentes.
- (2) parecía menos útil en un contexto proposicional.

Axiomatizando LHB

- El sistema **H** axiomatiza LHB extendiendo **K** con reglas y axiomas adicionales que rigen los nominales y @, y su interacción con $\Diamond$. Ej.
  - $@_i$ es una modalidad normal, por lo que se aplican K y Necesitación.
  - @ define una congruencia, por lo que $@_a a$, $@_a b \to @_b a$, etc., son teoremas.
  - …

Axiomatizando LHB

- El sistema **H** axiomatiza LHB extendiendo **K** con reglas y axiomas adicionales que rigen los nominales y @, y su interacción con $\Diamond$. Ej.
  - $@_i$ es una modalidad normal, por lo que se aplican K y Necesitación.
  - @ define una congruencia, por lo que $@_a a$, $@_a b \rightarrow @_b a$, etc., son teoremas.
  - …
- Las nociones de consecuencia (sintáctica y semántica), consistencia, MCSs, etc. se definen como para LMB.
- El Lema de Lindenbaum (que dice que todo conjunto de fórmulas consistente puede extenderse a un conjunto de fórmulas maximal consistente) funciona.

Axiomatizando LHB

- El sistema **H** axiomatiza LHB extendiendo **K** con reglas y axiomas adicionales que rigen los nominales y @, y su interacción con $\Diamond$. Ej.
  - $@_i$ es una modalidad normal, por lo que se aplican K y Necesitación.
  - @ define una congruencia, por lo que $@_a a$, $@_a b \to @_b a$, etc., son teoremas.
  - $\ldots$
- Las nociones de consecuencia (sintáctica y semántica), consistencia, MCSs, etc. se definen como para LMB.
- El Lema de Lindenbaum (que dice que todo conjunto de fórmulas consistente puede extenderse a un conjunto de fórmulas maximal consistente) funciona. Pero podemos hacerlo mejor …

Para los Curiosos: El Sistema **H**

Tautologías de PL y Modus Ponens

Para los Curiosos: El Sistema $\mathbf{H}$

Tautologías de PL y Modus Ponens

(K$_\Box$) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

(Nec$_\Box$) $\dfrac{\varphi}{\Box\varphi}$

Para los Curiosos: El Sistema **H**

Tautologías de PL y Modus Ponens

$(\mathrm{K}_\Box)$ $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

$(\mathrm{Nec}_\Box)$ $\dfrac{\varphi}{\Box\varphi}$

Axiomas esquema para @

$@_a(\varphi \to \psi) \to (@_a\varphi \to @_a\psi)$	$a \wedge @_a\varphi \to \varphi$
$@_a\varphi \leftrightarrow \neg @_a \neg\varphi$	$a \wedge \varphi \to @_a\varphi$
$@_a a$	$@_a b \leftrightarrow @_b a$
$@_a b \wedge @_b\varphi \to @_a\varphi$	$@_b @_a\varphi \leftrightarrow @_a\varphi$
$\Diamond @_a\varphi \to @_a\varphi$	

Para los Curiosos: El Sistema $\mathbf{H}$

Tautologías de PL y Modus Ponens

($K_\Box$) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

($Nec_\Box$) $\dfrac{\varphi}{\Box\varphi}$

Axiomas esquema para @

$$@_a(\varphi \to \psi) \to (@_a\varphi \to @_a\psi)$$
$$@_a\varphi \leftrightarrow \neg @_a \neg\varphi$$
$$@_a a$$
$$@_a b \wedge @_b\varphi \to @_a\varphi$$
$$\Diamond @_a\varphi \to @_a\varphi$$
$$a \wedge @_a\varphi \to \varphi$$
$$a \wedge \varphi \to @_a\varphi$$
$$@_a b \leftrightarrow @_b a$$
$$@_b @_a\varphi \leftrightarrow @_a\varphi$$

Reglas de inferencia para @

($Nec_@$) $\dfrac{\varphi}{@_a\varphi}$ (Name) $\dfrac{c \to \varphi}{\varphi}$ (c nominal no en φ)

(Paste) $\dfrac{@_a\Diamond b \wedge @_b\varphi \to \delta}{@_a\Diamond\varphi \to \delta}$ (a, b nominales no en φ ni δ)

Nombradas y Pegadas

Un **H**-MCS Σ es

- nombrado (named) si para algún nominal i, $i \in \Sigma$
- testificado (pasted) si $@_i\Diamond\varphi \in \Sigma$ implica $\exists j \in \textsc{nom}$ t.q. $@_i\Diamond j \wedge @_j\varphi \in \Sigma$

Nombradas y Pegadas

Un **H**-MCS Σ es

- nombrado (named) si para algún nominal i, $i \in \Sigma$
- testificado (pasted) si $@_i\Diamond\varphi \in \Sigma$ implica $\exists j \in \textsc{nom}$ t.q. $@_i\Diamond j \wedge @_j\varphi \in \Sigma$

Lema (Lema de Lindenbaum extendido)

Si Σ es LHB-consistente, entonces hay un **H**-MCS nombrado y testificado Σ^+ tal que $\Sigma \subseteq \Sigma^+$

Nombradas y Pegadas

Un **H**-MCS Σ es

- nombrado (named) si para algún nominal i, $i \in \Sigma$
- testificado (pasted) si $@_i\Diamond\varphi \in \Sigma$ implica $\exists j \in \text{NOM}$ t.q. $@_i\Diamond j \wedge @_j\varphi \in \Sigma$

Lema (Lema de Lindenbaum extendido)

Si Σ es LHB-consistente, entonces hay un **H**-MCS nombrado y testificado Σ^+ tal que $\Sigma \subseteq \Sigma^+$(donde Σ^+ está en un lenguaje extendido con nominales adicionales).

Nombradas y Pegadas

Un **H**-MCS Σ es

- nombrado (named) si para algún nominal i, $i \in \Sigma$
- testificado (pasted) si $@_i\Diamond\varphi \in \Sigma$ implica $\exists j \in \textsc{nom}$ t.q. $@_i\Diamond j \wedge @_j\varphi \in \Sigma$

Lema (Lema de Lindenbaum extendido)

Si Σ es LHB-consistente, entonces hay un **H**-MCS nombrado y testificado Σ^+ tal que $\Sigma \subseteq \Sigma^+$(donde Σ^+ está en un lenguaje extendido con nominales adicionales).

$$\Sigma^0 \quad = \quad \Sigma \cup \{k\}, k \notin \Sigma$$

Nombradas y Pegadas

Un **H**-MCS Σ es

- nombrado (named) si para algún nominal i, $i \in \Sigma$
- testificado (pasted) si $@_i\Diamond\varphi \in \Sigma$ implica $\exists j \in \textsc{nom}$ t.q. $@_i\Diamond j \wedge @_j\varphi \in \Sigma$

Lema (Lema de Lindenbaum extendido)

Si Σ es LHB-consistente, entonces hay un **H**-MCS nombrado y testificado Σ^+ tal que $\Sigma \subseteq \Sigma^+$(donde Σ^+ está en un lenguaje extendido con nominales adicionales).

$$
\begin{aligned}
\Sigma^0 &= \Sigma \cup \{k\}, k \notin \Sigma \\
\Sigma^{m+1} &= \begin{cases} \Sigma^m \text{ si } \Sigma^m \cup \{\varphi_{m+1}\} \text{ es inconsistente} \\ \\ \\ \end{cases}
\end{aligned}
$$

Nombradas y Pegadas

Un **H**-MCS Σ es

- nombrado (named) si para algún nominal i, $i \in \Sigma$
- testificado (pasted) si $@_i\Diamond\varphi \in \Sigma$ implica $\exists j \in \textsc{nom}$ t.q. $@_i\Diamond j \wedge @_j\varphi \in \Sigma$

Lema (Lema de Lindenbaum extendido)

Si Σ es LHB-consistente, entonces hay un **H**-MCS nombrado y testificado Σ^+ tal que $\Sigma \subseteq \Sigma^+$(donde Σ^+ está en un lenguaje extendido con nominales adicionales).

$$\Sigma^0 = \Sigma \cup \{k\}, k \notin \Sigma$$

$$\Sigma^{m+1} = \begin{cases} \Sigma^m \text{ si } \Sigma^m \cup \{\varphi_{m+1}\} \text{ es inconsistente} \\ \Sigma^m \cup \{\varphi_{m+1}\} \text{ si es consistente y } \varphi_{m+1} \text{ no es } @_i\Diamond\psi \\ \\ \end{cases}$$

Nombradas y Pegadas

Un **H**-MCS Σ es

- nombrado (named) si para algún nominal i, $i \in \Sigma$
- testificado (pasted) si $@_i\Diamond\varphi \in \Sigma$ implica $\exists j \in \textsc{nom}$ t.q. $@_i\Diamond j \wedge @_j\varphi \in \Sigma$

Lema (Lema de Lindenbaum extendido)

Si Σ es LHB-consistente, entonces hay un **H**-MCS nombrado y testificado Σ^+ tal que $\Sigma \subseteq \Sigma^+$(donde Σ^+ está en un lenguaje extendido con nominales adicionales).

$$\Sigma^0 = \Sigma \cup \{k\}, k \notin \Sigma$$

$$\Sigma^{m+1} = \begin{cases} \Sigma^m \text{ si } \Sigma^m \cup \{\varphi_{m+1}\} \text{ es inconsistente} \\ \Sigma^m \cup \{\varphi_{m+1}\} \text{ si es consistente y } \varphi_{m+1} \text{ no es } @_i\Diamond\psi \\ \Sigma^m \cup \{\varphi_{m+1}, @_i\Diamond j \wedge @_j\psi\} \text{ si es consistente} \\ \quad \text{y } \varphi_{m+1} \text{ es } @_i\Diamond\psi,\ \text{para } j \text{ un nuevo nominal} \end{cases}$$

Nombradas y Pegadas

Un **H**-MCS Σ es

- nombrado (named) si para algún nominal i, $i \in \Sigma$
- testificado (pasted) si $@_i\Diamond\varphi \in \Sigma$ implica $\exists j \in \text{NOM}$ t.q. $@_i\Diamond j \wedge @_j\varphi \in \Sigma$

Lema (Lema de Lindenbaum extendido)

Si Σ es LHB-consistente, entonces hay un **H**-MCS nombrado y testificado Σ^+ tal que $\Sigma \subseteq \Sigma^+$(donde Σ^+ está en un lenguaje extendido con nominales adicionales).

$$\begin{array}{lcl}
\Sigma^0 & = & \Sigma \cup \{k\}, k \notin \Sigma \\
\Sigma^{m+1} & = & \begin{cases} \Sigma^m \text{ si } \Sigma^m \cup \{\varphi_{m+1}\} \text{ es inconsistente} \\ \Sigma^m \cup \{\varphi_{m+1}\} \text{ si es consistente y } \varphi_{m+1} \text{ no es } @_i\Diamond\psi \\ \Sigma^m \cup \{\varphi_{m+1}, @_i\Diamond j \wedge @_j\psi\} \text{ si es consistente} \\ \quad \text{y } \varphi_{m+1} \text{ es } @_i\Diamond\psi, \text{ para } j \text{ un nuevo nominal} \end{cases} \\
\Sigma^+ & = & \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^m
\end{array}$$

Cada **H**-MCS es una Descripción Completa del Modelo

Lema (Lema de Chismes)

Sea Σ un **H**-MCS. Para cualquier nominal i en el lenguaje, definimos $\Gamma_i = \{\varphi \mid @_i\varphi \in \Sigma\}$. Entonces Γ_i es un **H**-MCS que contiene a i.

Cada **H**-MCS es una Descripción Completa del Modelo

Lema (Lema de Chismes)

Sea Σ un **H**-MCS. Para cualquier nominal i en el lenguaje, definimos $\Gamma_i = \{\varphi \mid @_i\varphi \in \Sigma\}$. Entonces Γ_i es un **H**-MCS que contiene a i.

El Modelo de Henkin para Σ: Sea Σ un **H**-MCS nombrado y testificado. Definamos $\mathcal{M}^\Sigma = \langle W^\Sigma, R^\Sigma, V^\Sigma \rangle$ donde R^Σ y V^Σ se definen como antes, y

$$W^\Sigma = \{\Gamma_i \mid \Gamma_i = \{\varphi \mid @_i\varphi \in \Sigma\}\}.$$

Cada **H**-MCS es una Descripción Completa del Modelo

Lema (Lema de Chismes)

Sea Σ un **H**-MCS. Para cualquier nominal i en el lenguaje, definimos $\Gamma_i = \{\varphi \mid @_i\varphi \in \Sigma\}$. Entonces Γ_i es un **H**-MCS que contiene a i.

El Modelo de Henkin para Σ: Sea Σ un **H**-MCS nombrado y testificado. Definamos $\mathcal{M}^\Sigma = \langle W^\Sigma, R^\Sigma, V^\Sigma \rangle$ donde R^Σ y V^Σ se definen como antes, y

$$W^\Sigma = \{\Gamma_i \mid \Gamma_i = \{\varphi \mid @_i\varphi \in \Sigma\}\}.$$

Hechos

- $\mathcal{M}^\Sigma$ depende de Σ (Cada Σ da origen a un $\mathcal{M}^\Sigma$ potencialmente distinto).
- $\mathcal{M}^\Sigma$ es numerable.
- $\mathcal{M}^\Sigma$ es nombrado: cada estado en W^Σ contiene (al menos) un nominal.

Completitud Híbrida/Henkin

- Los Lemas de la Verdad y la Existencia se pueden demostrar para $\mathcal{M}^{\Sigma}$ de manera similar a antes.
- Como resultado **H** completo respecto de la clase de modelos obtenidos a partir del conjunto de sus **H**-MCS (a fortiori, respecto de la clase de todos los modelos).

Completitud Híbrida/Henkin

- Los Lemas de la Verdad y la Existencia se pueden demostrar para $\mathcal{M}^\Sigma$ de manera similar a antes.
- Como resultado **H** completo respecto de la clase de modelos obtenidos a partir del conjunto de sus **H**-MCS (a fortiori, respecto de la clase de todos los modelos).
- Una fórmula es **pura** si sus átomos son nominales o $\top$ y $\bot$.
  - **Hecho:** Sea $\mathcal{M} = \langle W, R, V, n \rangle$ nombrado y φ pura. Si para todas las instancias puras ψ de φ, $\mathcal{M} \models \psi$, entonces para todos los V', $\langle W, R, V', n' \rangle \models \varphi$.
  - **Hecho:** Si φ es pura y para todos los V', n', $\langle W, R, V', n' \rangle \models \varphi$, entonces φ define una propiedad de primer orden en R.
- Por lo tanto, si **H** se extiende con un conjunto de axiomas puros Π, entonces la lógica resultante es **automáticamente fuertemente completo** con respecto al conjunto de modelos definido por Π.

Axiomatizando LHB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

- Agreguemos $\langle \mathsf{sb} \rangle$ a LHB (en vez de a LMB) para definir LHB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

Axiomatizando LHB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

- Agreguemos $\langle \mathsf{sb} \rangle$ a LHB (en vez de a LMB) para definir LHB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)
- En este lenguaje podemos definir:

$$\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}\varphi := (@_a\Diamond b \wedge \langle \mathsf{sb} \rangle(@_a\neg\Diamond b \wedge \varphi)) \vee (@_a\neg\Diamond b \wedge \varphi).$$

- $\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}$ borra el eje entre a y b (si es que tal eje existe), y si no, no hace nada.

Axiomas de reducción para $\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}$ en LHB

$\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}$ tiene axiomas de reducción en LHB. Las siguientes equivalencias son tautologías de LHB($\langle \mathsf{sb} \rangle$):

$$\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} c \quad \leftrightarrow \quad c \quad (c \in \mathrm{NOM})$$

Axiomas de reducción para $\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}$ en LHB

$\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}$ tiene axiomas de reducción en LHB. Las siguientes equivalencias son tautologías de LHB($\langle \mathsf{sb} \rangle$):

$$\begin{aligned}
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} c &\leftrightarrow c \quad (c \in \mathrm{NOM}) \\
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} p &\leftrightarrow p \quad (p \in \mathrm{PROP})
\end{aligned}$$

Axiomas de reducción para $\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}$ en LHB

$\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}$ tiene axiomas de reducción en LHB. Las siguientes equivalencias son tautologías de LHB($\langle \mathsf{sb} \rangle$):

$$\begin{array}{rcl}
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} c & \leftrightarrow & c \quad (c \in \text{NOM}) \\
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} p & \leftrightarrow & p \quad (p \in \text{PROP}) \\
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} \neg \varphi & \leftrightarrow & \neg \langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} \varphi
\end{array}$$

Axiomas de reducción para $\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}$ en LHB

$\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}$ tiene axiomas de reducción en LHB. Las siguientes equivalencias son tautologías de LHB($\langle \mathsf{sb} \rangle$):

$$
\begin{array}{rcl}
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} c & \leftrightarrow & c \quad (c \in \text{NOM}) \\
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} p & \leftrightarrow & p \quad (p \in \text{PROP}) \\
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} \neg \varphi & \leftrightarrow & \neg \langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} \varphi \\
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} (\varphi \wedge \psi) & \leftrightarrow & (\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} \varphi \wedge \langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} \psi)
\end{array}
$$

Axiomas de reducción para $\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}$ en LHB

$\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}$ tiene axiomas de reducción en LHB. Las siguientes equivalencias son tautologías de LHB($\langle \mathsf{sb} \rangle$):

$$
\begin{array}{rcl}
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} c & \leftrightarrow & c \quad (c \in \text{NOM}) \\
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} p & \leftrightarrow & p \quad (p \in \text{PROP}) \\
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} \neg\varphi & \leftrightarrow & \neg \langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} \varphi \\
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} (\varphi \wedge \psi) & \leftrightarrow & (\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} \varphi \wedge \langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} \psi) \\
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} @_c \varphi & \leftrightarrow & @_c \langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} \varphi
\end{array}
$$

Axiomas de reducción para $\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}$ en LHB

$\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}$ tiene axiomas de reducción en LHB. Las siguientes equivalencias son tautologías de LHB($\langle \mathsf{sb} \rangle$):

$$\begin{array}{rcl}
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} c & \leftrightarrow & c \quad (c \in \text{NOM}) \\
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} p & \leftrightarrow & p \quad (p \in \text{PROP}) \\
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} \neg\varphi & \leftrightarrow & \neg\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} \varphi \\
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} (\varphi \wedge \psi) & \leftrightarrow & (\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} \varphi \wedge \langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} \psi) \\
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} @_c \varphi & \leftrightarrow & @_c \langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} \varphi \\
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} \Diamond \varphi & \leftrightarrow & ((a \wedge \Diamond(\neg b \wedge \langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} \varphi)) \vee (\neg a \wedge \Diamond \langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} \varphi))
\end{array}$$

Axiomas de reducción para $\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}$ en LHB

$\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}$ tiene axiomas de reducción en LHB. Las siguientes equivalencias son tautologías de LHB($\langle \mathsf{sb} \rangle$):

$$
\begin{array}{rcl}
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} c & \leftrightarrow & c \quad (c \in \text{NOM}) \\
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} p & \leftrightarrow & p \quad (p \in \text{PROP}) \\
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} \neg\varphi & \leftrightarrow & \neg\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}\varphi \\
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} (\varphi \wedge \psi) & \leftrightarrow & (\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}\varphi \wedge \langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}\psi) \\
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} @_c \varphi & \leftrightarrow & @_c \langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}\varphi \\
\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab} \Diamond\varphi & \leftrightarrow & ((a \wedge \Diamond(\neg b \wedge \langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}\varphi)) \vee (\neg a \wedge \Diamond\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}\varphi))
\end{array}
$$

Usando axiomas esquema como hicimos con la axiomatización de LAP como LMB+axiomas de reducción, tenemos de esta forma una axiomatización de LHB($\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}$.

Axiomatizando LHB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

Falta finalmente caracterizar $\langle \mathsf{sb} \rangle$ en términos de $\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}$.

Axiomatizando LHB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

Falta finalmente caracterizar $\langle \mathsf{sb} \rangle$ en términos de $\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}$.

- **Axioma esquema (K) y regla (Nec) para $[\mathsf{sb}]$:**

  (K$_{[\mathsf{sb}]}$) $[\mathsf{sb}](\varphi \to \psi) \to ([\mathsf{sb}]\varphi \to [\mathsf{sb}]\psi)$

  (Nec$_{[\mathsf{sb}]}$) $\dfrac{\varphi}{[\mathsf{sb}]\varphi}$

Axiomatizando LHB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

Falta finalmente caracterizar $\langle \mathsf{sb} \rangle$ en términos de $\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}$.

- **Axioma esquema (K) y regla (Nec) para $[\mathsf{sb}]$:**

  (K$_{[\mathsf{sb}]}$) $[\mathsf{sb}](\varphi \to \psi) \to ([\mathsf{sb}]\varphi \to [\mathsf{sb}]\psi)$

  (Nec$_{[\mathsf{sb}]}$) $\dfrac{\varphi}{[\mathsf{sb}]\varphi}$

- Notación: Sea **ab** una sequencia de pares de nominales $a_1 b_1 \cdots a_n b_n$, usamos $\langle \mathsf{sb} \rangle_{\mathbf{ab}}\varphi$ como abreviatura de $\langle \mathsf{sb} \rangle_{a_1 b_1} \cdots \langle \mathsf{sb} \rangle_{a_n b_n}\varphi$.
  $\langle \mathsf{sb} \rangle_{\boldsymbol{ab}}\varphi$ es φ si $n = 0$.

Axiomatizando LHB($\langle \mathsf{sb} \rangle$)

Falta finalmente caracterizar $\langle \mathsf{sb} \rangle$ en términos de $\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}$.

- **Axioma esquema (K) y regla (Nec) para $[\mathsf{sb}]$:**

  (K$_{[\mathsf{sb}]}$) $[\mathsf{sb}](\varphi \to \psi) \to ([\mathsf{sb}]\varphi \to [\mathsf{sb}]\psi)$

  (Nec$_{[\mathsf{sb}]}$) $\dfrac{\varphi}{[\mathsf{sb}]\varphi}$

- Notación: Sea **ab** una sequencia de pares de nominales $a_1 b_1 \cdots a_n b_n$, usamos $\langle \mathsf{sb} \rangle_{\mathbf{ab}}\varphi$ como abreviatura de $\langle \mathsf{sb} \rangle_{a_1 b_1} \cdots \langle \mathsf{sb} \rangle_{a_n b_n}\varphi$. $\langle \mathsf{sb} \rangle_{\boldsymbol{ab}}\varphi$ es φ si $n = 0$.

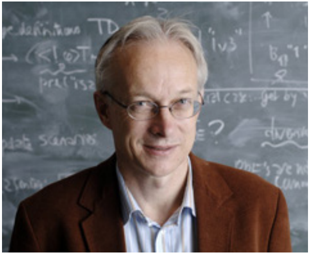
  Regla de inferencia para $\langle \mathsf{sb} \rangle$ a partir de $\langle \mathsf{sb} \rangle_{ab}$:

  $$\text{(B-Mix)}\ \frac{@_c \langle \mathsf{sb} \rangle_{\boldsymbol{ab}} (@_{a_{n+1}} \Diamond b_{n+1} \wedge \langle \mathsf{sb} \rangle_{a_{n+1} b_{n+1}} \varphi) \to \theta}{@_c \langle \mathsf{sb} \rangle_{\boldsymbol{ab}} \langle \mathsf{sb} \rangle \varphi \to \theta}$$

  $n \geq 0$ y donde los nominales a_{n+1}, b_{n+1} son diferentes de c y de otros nominales en $\langle \mathsf{sb} \rangle_{\boldsymbol{ab}}$ y no ocurren ni en φ ni en θ.

Bibliografía Relevante

He wears a crown of diamonds — Johan van Benthem, el rey de la bisimulación. Además de ser responsable de numerosas contribuciones a la lógica modal introdujo las primeras ideas sobre el operador de sabotaje.



- van Benthem, J.; (2005) *An essay on sabotage and obstruction*. In: D. Hutter, W. Stephan (Eds.), Mechanizing Mathematical Reasoning, Vol. 2605 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, pp. 268–276.
- van Benthem, J.; Li, L.; Shi, C.; and H. Yin. (2022) *Hybrid sabotage modal logic*. Journal of Logic and Computation, 33(6):1216–1242..

Bibliografía Relevante

Sobre la Lógica de Anuncios Públicos

Plaza, J.; (1989) *Logics of public communications*. In M. Emrich, M. Pfeifer, M. Hadzikadic, and Z. Ras, editors, Procceedings of the 4th International Symposium on Methodologies for Intelligent Systems, pages 201–216.

Wang, Y.; and Cao, Q. (2013) *On axiomatizations of public announcement logic*, Synthese, Vol. 190, pp. 103-134.

Sobre operadores de updates sobre relaciones

Fervari R.; (2014) *Relation-Changing Modal Logics.* PhD Thesis, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Córdoba, Argentina.

Areces, C., Fervari, R., and Hoffmann, G.; (2015) *Relation-Changing Modal Operators.* Logic Journal of the IGPL.

El Exámen Mañana

- Es presencial, individual, a “libro cerrado”, y multiple choice.

El Exámen Mañana

- Es presencial, individual, a “libro cerrado”, y multiple choice.
- (Por ahora) Son 12 preguntas (vamos a ver si agregamos algunas más, y esas son “buenas noticas”, seguir leyendo).

El Exámen Mañana

- Es presencial, individual, a “libro cerrado”, y multiple choice.
- (Por ahora) Son 12 preguntas (vamos a ver si agregamos algunas más, y esas son “buenas noticas”, seguir leyendo).
- 1 punto por pregunta, se aprueba con 5 puntos, satura en 10.

El Exámen Mañana

- Es presencial, individual, a "libro cerrado", y multiple choice.
- (Por ahora) Son 12 preguntas (vamos a ver si agregamos algunas más, y esas son "buenas noticas", seguir leyendo).
- 1 punto por pregunta, se aprueba con 5 puntos, satura en 10.
- Cada pregunta tiene n opciones.
  - Cada opción correcta suma $\frac{1}{n}$ puntos.
  - Cada opción incorrecta resta $\frac{1}{n}$ puntos.

El Exámen Mañana: Ejemplos

- Comparemos la expressividad de LMB y LAP. Sabemos que:
  1. LMB es mas expresiva que LAP.
  2. LMB es menos expresiva que LAP.
  3. LMB es igual de expresiva que LAP.

El Exámen Mañana: Ejemplos

- Comparemos la expressividad de LMB y LAP. Sabemos que:
  1. LMB es mas expresiva que LAP.
  2. LMB es menos expresiva que LAP.
  3. LMB es igual de expresiva que LAP.
- Cuales de las siguientes fórmulas puede satisfacerse en la raíz de un árbol.
  1. $[!\Diamond\Box q]\Diamond r$.
  2. φ para cualquier $\varphi \in$ LMB.
  3. $\Diamond\Diamond\top \wedge [\mathsf{sb}]\Box\top$.

El Exámen Mañana: Ejemplos

- Comparemos la expressividad de LMB y LAP. Sabemos que:
  1. LMB es mas expresiva que LAP.
  2. LMB es menos expresiva que LAP.
  3. LMB es igual de expresiva que LAP.
- Cuales de las siguientes fórmulas puede satisfacerse en la raíz de un árbol.
  1. $[!\Diamond\Box q]\Diamond r$.
  2. φ para cualquier $\varphi \in$ LMB.
  3. $\Diamond\Diamond\top \wedge [\mathsf{sb}]\Box\top$.
- Si dos modelos son bisimilares usando la bisimilaridad definida para LMB($\langle\mathsf{sb}\rangle$) entonces son bisimilares según la definición dada para LMB.
  1. Verdadero.
  2. Falso.